Ю. В. Линник

Разложения вероятностных законов

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

Ю. В. ЛИННИК

РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1960

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

В книге излагаются вопросы, примыкающие к теории суммирования независимых случайных величин в аналитическом аспекте. После вспомогательных сведений из теории функций комплексного переменного подробно излагаются свойства характеристических функций случайных величин. Эти свойства применяются к построению достаточно обширной теории разложения вероятностных законов (главным образом безгранично делимых). Далее даются применения полученных теорем к теории суммирования независимых случайных величин без предельной пренебрегаемости и к некоторым вопросам математической статистики.

Книга рассчитана на преподавателей вузов, научных работников, студентов старших курсов и аспирантов, интересующихся теорией вероятностей.

Памяти А. Я. Хинчина

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данной монографии рассматриваются вопросы теории разложения вероятностных законов, области, по применяемому ею аппарату смежной между теорией вероятностей и теорией функций комплексного переменного. Эта область начала развиваться с 1936 г., со времени работы Г. Крамера [51]; большие вклады в неё сделали Г. Крамер, А. Я. Хинчин, П. Леви и другие. Эти результаты имелись в разрозненном виде в различных журналах. В 1957 г. появилась небольшая монография Д. Дюгэ [60], которая содержит много интересного материала, в том числе примеры самого Д. Дюгэ, но не охватывает довольно общих теорем, доказанных в 1957—1958 гг. Кроме того, основные теоремы А. Я. Хинчина в этой книге не доказаны, а относящиеся к ним рассуждения на стр. 33—34 [60] неубедительны.

Нужный для развития теории разложений вероятностных законов аппарат изложен в гл. 1; при этом такой материал, как свойства производных чисел Дини, „стаканчики И. М. Виноградова", теорема Палей—Винера, изложение которого не всегда легко найти, приведен с подробными доказательствами, для более распространенных теорем указаны лишь формулировки. В гл. 2 о характеристических функциях приведено много материала, не используемого далее (в том числе новые теоремы В. М. Золотарева); эта глава может служить сводкой основных результатов о характеристических функциях. Главы 7—10 излагают результаты автора о разложениях безгранично делимых законов (в основном, с гауссовой компонентой), доказанные в 1957 г. В доказательстве условий достаточности внесены упрощения. Так, удалось освободиться от применения свойств точек Лебега суммируемых функций; введено простое преобразование, заменяющее суммируемую функцию абсолютно непрерывной.

Изложение в главах 7—10 принято концентрическое. Многие теоремы 7 и 10 глав, а также теоремы Г. Крамера и Д. А. Райкова следуют из теоремы 10.0.1. Но для выяснения действия метода, приложения которого, по-видимому, еще не исчерпаны, предпочтительно излагать эти приложения сперва к более простым случаям, где схема действия достаточно прозрачна, а затем, ссылаясь на них, переходить к более сложным случаям.

Изложение основных теорем А. Я. Хинчина в главе 5 упрощено, по сравнению с оригиналом [43], сочетанием свойств „функционала А. Я. Хинчина“ (§ 3, гл. 2) со свойствами функции концентрации П. Леви.

Многие интересные результаты пришлось указать без доказательства, чтобы сохранить данный объем монографии. Сюда относятся результаты Н. А. Сапогова и О. В. Шалаевского в гл. 11 и результаты П. Леви и Д. А. Райкова в главе 12. В последней главе 13 указана проблематика и формулируются некоторые недоказанные результаты.

В. М. Золотарев (Москва) прислал мне некоторые из своих неопубликованных результатов о характеристических функциях; они включены в § 1 главы 2. И. В. Романовский указал некоторые новые свойства функции концентрации П. Леви (включено во введение).

И. А. Ибрагимов дал мне ряд полезных советов. Существенную помощь при подготовке рукописи к печати мне оказали О. И. Румянцева, В. В. Вишнякова и М. Е. Ильина. Пользуюсь случаем выразить всем указанным лицам большую благодарность.

Ю. В. Линник

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. СВЯЗИ ТЕОРИИ РАЗЛОЖЕНИЯ С ТЕОРИЕЙ СУММИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Теория суммирования случайных величин, ведущая начало от работ П. А. Чебышева [40], стала систематически использовать понятие характеристической функции случайной величины со времени появления классического доказательства А. М. Ляпунова [67] центральной предельной теоремы теории вероятностей. Это понятие было основным орудием работ П. Леви, Г. Крамера, А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова, Б. В. Гнеденко и других ученых — работ, приведших к той разработанной структуре общей теории суммирования независимых величин, которая изложена в известной книге [6].

Для того чтобы наиболее естественным образом прийти к задачам теории разложения случайных величин, обратимся к центральной предельной теореме в условиях Линдеберга.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ последовательность независимых случайных величин, имеющих законы распределения $F_i(x) = P(X_i < x)$, математические ожидания $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_i(x) = a_i$ и дисперсии $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - a_i)^2 dF_i(x) = b_i^2$; пусть $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = B_n$; $\sum\limits_{1} a_i = A_n$; $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Условие Линдеберга

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|x| > \tau\sqrt{B_n}} (x - a_i)^2 dF_i(x) \to 0$$

при $n \to \infty$ и любом фиксированном $\tau > 0$ достаточно для нормальной сходимости, т. е. условия

$$P\left\{\frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \varepsilon_n, \qquad (0,1,1)$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по x. Оно же является необходимым при выполнении условия предельной пренебрегаемости, т. е. условия

$$P\left\{\left|\frac{x_i - a_i}{\sqrt{B_n}}\right| > \varepsilon\right\} \to 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (0,1,2)$$

(равномерно по $i \leqslant n$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$) (см., например, [44]).

Грубо говоря, при весьма широких условиях нормированная и центрированная сумма предельно пренебрегаемых случайных величин распределена по закону, весьма близкому к нормальному. Однако в то время, как подобная близость закона распределения указанной суммы к нормальному закону представляет типичное явление, точное совпадение этого закона с нормальным законом есть уже явление не типичное, а исключительное.

В 1936 г. появилась работа Г. Крамера [51], в которой доказывалось, что если сумма конечного числа независимых случайных величин распределена по нормальному закону, то каждое слагаемое должно быть нормальным.

Таким образом, лишь в исключительном случае нормальности каждого слагаемого, закон распределения суммы будет в точности совпадать с нормальным.

Указанная работа Г. Крамера, трактующая о возможных разложениях нормального закона на независимые компоненты, положила начало теории разложения вероятностных законов.

Как указал П. Леви [64], из теоремы Г. Крамера почти непосредственно вытекает утверждение о том, что если сумма ограниченного количества независимых случайных величин имеет распределение, достаточно близкое к нормальному (далее будет пояснен точный смысл этой близости), то каждое слагаемое распределяется по закону, близкому к нормальному. Ограниченность количества слагаемых в сумме отвечает, грубо говоря, отсутствию условия предельной пренебрегаемости, и теорема Г. Крамера дает ключ к формулировкам теорем о нормальной сходимости сумм независимых случайных величин при отсутствии условия предельной пренебрегаемости. Такие теоремы и были доказаны П. Леви [64].

Эти теоремы приводят к наиболее естественному взгляду на положение теории разложения вероятностных законов по отношению к теории суммирования независимых случайных величин. Именно, исследование возможных независимых компонент заданного вероятностного закона должно лежать в основе теории суммирования независимых случайных величин при отсутствии условия предельной пренебрегаемости.

Классическая теория суммирования, изложенная в [6], выделяет класс безгранично делимых законов, как класс тех и только тех вероятностных законов, к которым могут притягиваться серии сумм случайных величин при условии предельной пренебрегаемости внутри каждой из сумм серии. Для того, чтобы выяснить условия притяжения таких сумм при отсутствии предельной пренебрегаемости, нужно построить теорию разложения безгранично делимых случайных величин на независимые компоненты. Такая проблема была сформулирована Г. Крамером в 1947 г. в его известном докладе [53]. Пока трудно надеяться решить ее в общем виде в сколько-нибудь обозримых терминах, однако из проблемы естественно выделяются некоторые наиболее важные направления, одно из которых будет в достаточной мере представлено в этой книге; будут получены и соответствующие теоремы суммирования без предельной пренебрегаемости.

Теория разложения вероятностных законов приносит также некоторую пользу и в классической теории суммирования случайных величин (см. [44], стр. 44—46, 56—61; [64], стр. 192—196).

При надлежащем аналитическом обобщении („α-разложения“, о котором будет сказано далее) выявляются связи теории разложения со многими любопытными свойствами линейных статистик.

Своеобразной чертой теории разложения вероятностных законов является то, что большинство теорем здесь имеют „точный“, (не асимптотический) характер. Это обстоятельство может приводить к взгляду на теорию разложений, как на направление аналитическое или даже как на алгебру или арифметику вероятностных законов распределения. Однако только вероятностные концепции и приложения придают этой теории интерес и жизненность, и потому естественно считать ее частью теории вероятностей, примыкающей к суммированию случайных величин.

§ 2. СВОДКА НЕОБХОДИМЫХ СВЕДЕНИЙ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ РАЗЛОЖЕНИЙ

Нужные нам предварительные сведения имеются в курсе Б. В. Гнеденко [5], в главах 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9; подробное знакомство с этими главами предполагается.

Мы будем заниматься только одномерными случайными величинами (обращаясь к случайным векторам и случайным величинам в пространстве Банаха лишь в отделе проблематики).

Дадим сводку употребляемых далее понятий и обозначений, а также сокращений обозначений, которых будем далее придерживаться.

Интегральным законом распределения (з. р.) случайной величины X будем называть

$$F(x)=P(X<x).$$

Это — неубывающая, непрерывная слева функция; имеем:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x)=1.$$

Если X имеет з. р. $F(x)$, то $Y=aX+b$, где a, b — константы, $a>0$, имеет з. р. $F\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

При заданной случайной величине X величины $Y=aX+b$ $(a>0)$ образуют тип распределений, порождаемых X; любая из указанных величин Y порождает тот же тип. Величина $(-X)$ имеет з. р., совпадающий с $1-F(-x)$ во всех точках непрерывности $F(x)$.

В множестве з. р. $\{F(x)\}$ удобно рассматривать расстояние двух з. р. $F_1=F_1(x)$ и $F_2=F_2(x)$, введенное П. Леви ([6], стр. 47), $L(F_1, F_2)$, являющееся точной верхней гранью расстояний двух точек M_1 и M_2, в которых параллельные прямые $x+y=a$ пересекают графики кривых $y=F_1(x)$ и $y=F_2(x)$. Введение этого расстояния превращает множество з. р. $\{F(x)\}$ в полное метрическое пространство ([6], стр. 38—43), при этом з. р., совпадающие в точках непрерывности каждого из них, отождествляются (что будем предполагать далее).

Нам нужна будет также теорема (см. [6], стр. 43) о компактности множеств S з. р. в смысле метрики П. Леви.

Теорема 0. 2. 1.

Для компактности множества з. р. S необходимо и достаточно, чтобы в пределах S условия $F(x)\to 0$ при $x\to-\infty$, $F(x)\to 1$ при $x\to\infty$, $F\in S$ выполнялись равномерно. Доказательство см. в указанной книге [6], стр. 43, 44. Если для последовательности з. р. $\{F_n\}$ имеем $L(F_n, F)\to 0$, где F з. р., то это равносильно *слабой сходимости* $F_n(x)\to F(x)$ в каждой точке непрерывности з. р. $F(x)$ (см. [6], стр. 38).

Реальное число α называется точкой роста з. р. $F(x)$, если $F(\alpha+\varepsilon)-F(\alpha-\varepsilon)>0$ при любом $\varepsilon>0$. З. р. с единственной точкой роста называются *несобственными*; таким будет, например, з. р.

$$\epsilon(x)=0 \quad (x<0), \qquad \epsilon(x)=1 \quad (x>0). \tag{0,2,1}$$

Последовательность случайных величин X_n называется бесконечно малой (предельно пренебрегаемой) случайной величиной, если ее з. р. стремится к $\epsilon(x)$: $F_n(x)\to\epsilon(x)$ в смысле слабой сходимости, или, что то же:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n|>\varepsilon\}\to 0$$

для любого $\varepsilon>0$.

В случае существования моментов у з. р. $F(x)$ будем обозначать их, как обычно принято в математической статистике,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = m; \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 dF(x);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x) = \alpha_k \quad (k = 2, 3, \ldots); \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^k dF(x) = \mu_k$$

$$(k = 2, 3, \ldots); \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x) = \beta_k; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x-m|^k dF(x) = \gamma_k$$

$$(k > 0).$$

Семиинварианты (кумулянты) з. р. $F(x)$ будем обозначать буквами $\varkappa_k$: $\varkappa_2 = \mu_2 = \sigma^2$; $\varkappa_3 = \mu_3$; $\varkappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$; $\varkappa_5 = \mu_5 - 10\mu_3\mu_2$; ...

Между абсолютными моментами β_i з. р. $F(x)$ имеют место неравенства (см. [9], стр. 31)

$$\beta_1 \leqslant \beta_2^{1/2} \leqslant \beta_3^{1/3} \leqslant \ldots \leqslant \beta_k^{1/k}. \quad (0,2,2)$$

Важное значение имеет также понятие функции концентрации $Q(l)$ для случайной величины X [64]:

$$Q(l) = \sup_x P\{x \leqslant X \leqslant x + l\}. \quad (0,2,3)$$

$Q(l)$ является неубывающей функцией l; она изменяется от 0 до 1; для непрерывных з. р. имеем $Q(0) = 0$.

З. р. $F(x)$ однозначно представляем в виде суммы

$$F(x) = a_{\text{I}}F_{\text{I}}(x) + a_{\text{II}}F_{\text{II}}(x) + a_{\text{III}}F_{\text{III}}(x),$$

где $a_{\text{I}} \geqslant 0$; $a_{\text{II}} \geqslant 0$; $a_{\text{III}} \geqslant 0$; $a_{\text{I}} + a_{\text{II}} + a_{\text{III}} = 1$; F_{I}, F_{II}, F_{III} з. р. такие, что: $F_{\text{I}}(x)$ абсолютно непрерывна; $F_{\text{I}}(x) = \int_{-\infty}^{x} F_{\text{I}}'(t)\,dt$ для всех значений x; $F_{\text{II}}(x)$ — ступенчатая функция, равчая сумме скачков функции $F_{\text{II}}(x)$ во всех точках разрыва; $\leqslant x$, $F_{\text{III}}(x)$ — сингулярная компонента, непрерывная, но не абсолютно непрерывная функция, производная которой равна нулю почти всюду в смысле меры Лебега (см. [9], стр. 27—28, пример F_{III} см. [26]. Если в формуле (0,2,3), $a_{\text{I}} = 1$; $a_{\text{II}} = a_{\text{III}} = 0$, то $F(x) = F_{\text{I}}(x)$; почти везде (в смысле меры Лебега) существует $F'(x) = f(x)$ — плотность вероятности (пл. в.), и для всех x $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Основное значение для теории разложения вероятностных законов имеет понятие сложения независимых случайных величин. Пусть (X_1, X_2) случайный вектор с независимыми компонентами, имеющими з. р. соответственно $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Сумма $X_1 + X_2$ распределена по закону

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-u) F_2(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-u) F_1(u)\, du.$$

Эту операцию над з. р. будем называть сверткой или композицией з. р. и обозначать звездочкой $*$: $F = F_1 * F_2$. Определение композиции распространяется на любое конечное число случайных величин и является операцией коммутативной и ассоциативной

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1; \quad F_1 * (F_2 * F_3) = (F_1 * F_2) * F_3.$$

Введение операции композиции превращает, таким образом, множества законов распределения в ассоциативную систему с одним действием. Эта система имеет единицу: з. р. $\epsilon(x)$ [см. (0,2,1)] $F_1 * \epsilon = \epsilon * F_1 = F_1$ для любого з. р. F_1. Если дана случайная величина X с з. р. F, то описание возможных разложений X на сумму двух или более независимых случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$

$$X = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_k$$

совпадает с описанием разложений з. р. F в виде

$$F = F_1 * F_2 * \ldots * F_k.$$

Такие разложения будем также называть *факторизацией* з. р. F; F_i будем называть *компонентами*.

Описание возможных факторизаций для различных типов з. р. F и их приложения к предельным теоремам теории вероятностей и некоторым другим вопросам и составляет предмет теории разложения вероятностных законов.

Для дальнейшего важна следующая лемма П. Леви.

Лемма П. Леви

Функция концентрации компонент не меньше функции концентрации результирующего закона.

Пусть $Z = X + Y$ (X, Y независимы); $Q_Z(l)$, $Q_X(l)$, $Q_Y(l)$ — соответствующие функции концентрации; F_Z, F_X, F_Y — з. р. При любом значении u имеем:

$$P\{u - x \leqslant Y \leqslant u - x + l\} \leqslant Q_Y(l).$$

Ввиду этого

$$P\{u \leqslant Z \leqslant u + l\} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} Q_Y(l)\, dF_X(x) = Q_Y(l),$$

т. е.

$$Q_Z(l) \leqslant Q_Y(l). \qquad (0,2,4)$$

Отметим еще одну теорему о концентрации компонент, сообщенную автору И. В. Романовским в январе 1960 г.

Теорема 0.2.2 (И. В. Романовского)

$$Q_Z(l) \leqslant Q_X(l)\, Q_Y(l) + (1 - Q_X(l))\,(1 - Q_Y(l)).$$

Основное значение для теории разложения вероятностных законов, как и для теории суммирования независимых случайных величин, имеет понятие характеристической функции (х. ф.) случайной величины X с з. р. $F(x)$. По определению, х. ф. X

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

для всех реальных значений t. Понятие х. ф. своеобразно вводит в теорию вероятностей мнимые числа, непосредственно не связанные с понятием случайной величины и з. р. Только при чисто мнимом значении it выражение $\varphi(t)$ имеет смысл для любых з. р. $F(x)$.

Основным свойством х. ф. является, как известно, то, что при сложении независимых случайных величин соответствующие им х. ф. просто перемножаются. Если з. р. F_i отвечает х. ф. $\varphi_i(t)$ и

$$F = F_1 * F_2 * \ldots * F_k,$$

то

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\, \varphi_2(t) \ldots \varphi_k(t)$$

и обратно. Таким образом, теория разложения з. р. сводится к исследованию разложений тех или иных классов отвечающих им х. ф. на множители, являющиеся х. ф.

Свойства х. ф., как хорошо известные, так и менее известные и новые, будут подробно трактоваться в главе 2. Здесь же мы напомним лишь известную формулу, восстанавливающую з. р. по известной х. ф. (см. [9], стр. 39—40).

Если з. р. $F(x)$ непрерывен при $x = \xi$ и $\xi = \xi + h$, то

$$F(\xi + h) - F(\xi) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-ith}}{it}\, e^{-it\xi} f(t)\, dt. \qquad (0,2,5)$$

Тип нормальных законов с плотностью вероятности $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times \times \exp - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}$ будем обозначать $N(a, \sigma)$. Соответствующие х. ф. имеют вид

$$\exp\left(ait - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right). \qquad (0,2,6)$$

Законы Пуассона — дискретные з. р., для которых

$$P(X = \alpha m + \beta) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!},$$

где α, β — фиксированные реальные числа, $\lambda > 0$ — константа, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, имеют х. ф.

$$\exp(\lambda(e^{i\alpha t} - 1) + i\beta t). \tag{0,2,7}$$

С аналитической точки зрения такие х. ф. являются целыми функциями комплексной переменной it бесконечно высокого порядка. Фундаментальная роль законов Пуассона в теории суммирования независимых случайных величин приводит к тому, что в теории разложения з. р. играют большую роль целые функции бесконечно высокого порядка; это создает своеобразные трудности в исследовании данного предмета.

Композиции конечного числа законов Пуассона и совокупность з. р., предельных для таких композиций, порождают класс безгранично делимых законов (б. д. з.), фундаментальная роль которых в теории суммирования хорошо известна. Характеристические функции б. д. з. имеют вид

$$\varphi(t) = \exp\left(\beta it - \gamma t^2 + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dM(u) + \right.$$
$$\left. + \int_{0}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dN(u)\right), \tag{0,2,8}$$

где β и $\gamma \geqslant 0$ — реальные константы; $M(u)$ и $N(u)$ — неубывающие функции — такие, что

$$M(-\infty) = N(+\infty) = 0,$$

$$\int_{-a}^{0} u^2 dM(u) < \infty; \quad \int_{0}^{a} u^2 dN(u) < \infty$$

для любого $a > 0$. Эти функции $M(u)$ и $N(u)$ будем называть спектральными функциями (с. ф.) данного б. д. з.

Если $\gamma > 0$, то будем говорить, что б. д. з. имеет гауссову компоненту.

В настоящей книге будут разбираться в основном вопросы теории разложения б. д. з. (проблема Г. Крамера, см. [53]). Разработка этой проблемы требует вспомогательных сведений из теории функций вещественного и комплексного переменного, не все из которых достаточно широко известны. Эти сведения будут собраны в следующей главе.

Глава первая

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ РЕАЛЬНОГО И КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Здесь предполагается знакомство с понятием меры Лебега, измеримой функции и интеграла Лебега в объеме первых девяти глав курса И. П. Натансона [26] и теорией функций комплексного переменного в объеме курса Е. Тичмарша [37]. Сводка в особенности нужных нам в дальнейшем теорем и формул, а также необходимых сведений, не имеющихся в указанных курсах, будет дана в этой главе.

§ 1. ПРОИЗВОДНЫЕ ЧИСЛА ДИНИ И ИХ СВОЙСТВА. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть $f(x)$ однозначная функция, заданная на сегменте $[a, b]$.

Выражения

$$D_x^+ f = \overline{\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}; \quad d_x^+ f = \underline{\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

$$D_x^- f = \overline{\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}; \quad d_x^- f = \underline{\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

называются производными числами Дини, соответственно правым верхним, правым нижним, левым верхним и левым нижним. Для них допускаются и значения $\pm\infty$.

Нам важна будет следующая теорема (см. [2], стр. 97, 98).

Теорема 1.1.1

Пусть L и l точные верхние и нижние грани какого-либо одного из четырех производных чисел Дини функции $f(x)$ непрерывной на сегменте $[a, b]$. Тогда*

* При определении верхней и нижней грани производные справа в $(\cdot)\ b$ и слева в $(\cdot)\ a$ в расчет не принимаются, так как они не определены.

$$l \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant L. \tag{1,1,1}$$

Рассмотрим для определенности правую верхнюю производную (этого достаточно, ибо при заменах $x \to -x$; $f \to -f$ ее можно перевести в любую из трех остальных). Докажем сперва правое неравенство в (1,1,1). Если бы оно не выполнялось, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имели бы:

$$f(b)-f(a)-(L+\varepsilon)(b-a)>0.$$

Составим непрерывную функцию

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-(L+\varepsilon)(x-a).$$

При значениях x, достаточно близких к a, она отрицательна, ибо $D_a^+ f \leqslant L < L+\varepsilon$. Далее, $\varphi(b)>0$. Значит, $\varphi(x)$ имеет корни в интервале (a, b). Пусть c — крайний правый ее корень (множество этих корней замкнуто в силу непрерывности $\varphi(x)$). Тогда

$$\varphi(x)-\varphi(c)>0, \quad \text{если } b \geqslant x > c, \text{ т. е.}$$

$$f(x)-f(c)-(L+\varepsilon)(x-c)>0 \quad (b \geqslant x > c).$$

Но тогда $D_c^+ f \geqslant L+\varepsilon > L$, что невозможно. Итак, правое неравенство в (1,1,1) верно.

Пусть нарушается левое неравенство в (1,1,1). Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$f(b)-f(a)-(l-\varepsilon)(b-a)<0.$$

Полагаем $\varphi(x)=f(x)-f(a)-(l-\varepsilon)(b-a)$; $\varphi(b)<0$.

При значениях x, близких к a, $\varphi(x)>0$, ибо $D_a^+ f \geqslant l > l-\varepsilon$, так что $\varphi(x)$ имеет корни в (a, b).

Пусть c крайний правый корень; при $b \geqslant x > c$, $\varphi(x)<0$ и $\varphi(x)-\varphi(c)<0$, так что $f(x)-f(c)-(l-\varepsilon)(x-c)<0$ при $b \geqslant x > c$. Тогда $D_c^+ f \leqslant l-\varepsilon < l$, что невозможно. Этим (1,1,1) доказано полностью.

При разборе теории характеристических функций нам потребуются некоторые свойства выпуклых функций. Сформулируем их. Выпуклой книзу функцией на сегменте $[a, b]$ называется функция $\varphi(t)$ такая, что

$$\varphi(t_1+t_2) \leqslant \frac{\varphi(t_1)+\varphi'(t_2)}{2}. \tag{1,1,2}$$

Мы будем рассматривать только непрерывные выпуклые функции. Они обладают следующими важными свойствами: $\varphi(t)$, абсолютно непрерывные, удовлетворяют условию Липшица в каждом конечном сегменте и

$$\varphi(t)=\int_a^t \psi(u)\,du+\varphi(a), \tag{1,1,3}$$

где $\psi(u)$ — неубывающая непрерывная справа функция, причем почти везде на $[a, b]$ (где b может быть равно ∞)

$$\varphi'(t) = \psi(t). \tag{1,1,4}$$

(Доказательство этих теорем см., например, в кн. [10], стр. 11 – 16).

В дальнейшем у нас встретится выпуклая функция $\varphi(t)$, заданная в сегменте $[0, \infty]$, причем $\varphi(t)$ неотрицательна и $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. В этом случае, очевидно, $\psi(t) = \varphi'(t) < 0$ и $\psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Заметим еще, что для выпуклости $\varphi(t)$ достаточно существования и неотрицательности второй производной $\varphi''(t)$.

§ 2. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

В теории разложения б. д. з. нам понадобятся некоторые элементарные свойства непрерывных (цепных) дробей, изложенные, например, в первых параграфах книги [45]. Всякое положительное число α можно изобразить в виде $\alpha = a_0 + \alpha_1$, где $a_0 = [\alpha]$ целая часть α, а $\alpha_1 = \{\alpha\}$ дробная часть α. Если $\alpha_1 \neq 0$, полагаем $\alpha_1 = \frac{1}{r_1}$, $r_1 > 1$; $r_1 = a_1 + \alpha_2$, где $a_1 = [r_1]$; $\alpha_2 = \{r_1\}$. Если $a_2 \neq 0$, полагаем $\alpha_2 = \frac{1}{r_2}$; $r_2 > 1$ и действуем далее таким же образом. Получаем разложение α в непрерывную дробь

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}, \tag{1,2,1}$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ неполные частные дроби. Если α рационально, то дробь получается конечной, если же α иррационально, то дробь бесконечна; разложение числа α в непрерывную дробь однозначно.

В дроби (1,2,1) мы можем выделить часть, содержащую первые $n+1$ неполных частных $a_0, a_1, \dots, a_n$:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n}}}. \tag{1,2,2}$$

Записывая (1,2,2) в виде несократимой дроби $\frac{P_n}{Q_n}$, получим n-ю подходящую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ для числа α.

При этом имеют место формулы (см., например, [45], стр. 11—37). Для любого $n \geqslant 2$:

$$\left.\begin{aligned} P_n &= a_n P_{n-1} + P_{n-2}, \\ Q_n &= a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}, \end{aligned}\right\} \tag{1,2,3}$$

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}, \qquad (1,2,4)$$

$$Q_n \geqslant 2Q_{n-2}, \quad Q_n > 2^{\frac{n-1}{2}}, \qquad (1,2,5)$$

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| \leqslant \frac{1}{Q_n \tau}, \qquad (1,2,6)$$

где $\tau > 1$ любое число, а $\frac{P_n}{Q_n}$ есть подходящая дробь, такая, что знаменатель ее Q_n есть наибольшее из чисел ряда Q_1, Q_2, Q_3, ..., не превосходящее τ.

§ 3. СВОДКА НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ ТЕОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

В дальнейшем интегралы будут пониматься в смысле Лебега.

Пусть $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ — реальная или комплексная функция; нам нужны некоторые формулы М. Планшереля (см., например, [36], стр. 93—95).

Положим при $a > 0$

$$F(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(y)\, e^{ixy} dy. \qquad (1,3,1)$$

Тогда $F(x, a)$ при $a \to \infty$ сходится в смысле нормы $L^2(-\infty, \infty)$ (в среднем квадратичном) к некоторой функции $F(x) \in L^2(-\infty, \infty)$. Это записывается так: $\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, F(x, a) = F(x)$; l. i. m. (limit in mean) — знак сходимости в среднем квадратичном.

Обратно: для

$$f(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} F(y)\, e^{-ixy} dy, \qquad (1,3,2)$$

$$\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, f(x, a) = f(x). \qquad (1,3,3)$$

Далее, имеем почти для всех x (в смысле меры Лебега):

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{e^{ixy} - 1}{iy} dy, \qquad (1,3,4)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy} dy. \qquad (1,3,5)$$

Нам нужна также теорема о свертке. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к $L^2(-\infty, \infty)$;

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{itx}\,dt;\quad G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{itx}\,dt.$$

Тогда функции $F(x)\,G(x)$ и $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)f(x-u)\,du$ образуют пару трансформаций Фурье в том смысле, что при всех x

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,G(t)\,e^{ixt}\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(x-u)\,du.$$

Доказательство см. Е. С. Тичмарш [36], стр. 119—121. Далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt.$$

Заметим еще, что если $f(x)\in L_1(-\infty, \infty)$ и $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times$ $\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{ixy}\,dy\in L_1(-\infty, \infty)$, то почти для всех x, $f(x)=$ $=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}F(y)\,dy$. В частности, если $f(x)$ непрерывна, то такое равенство верно для всех x.

Для дальнейшего нам будет нужна еще одна теорема из теории преобразований Фурье.

Теорема 1. 3. 1

Пусть $\varphi(t)$ ограничена и интегрируема в $[-T, T]$ $(0<T<<\infty)$ и пусть для всех x

$$f(x)=\int_{-T}^{T} e^{ixt}\varphi(t)\,dt\geqslant 0. \tag{1,3,6}$$

Тогда $f(x)\in L_1(-\infty, \infty)$.

Заметим, что $f(x)$, очевидно, непрерывна ($T<\infty$) и подавно интегрируема. Нам надо доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx<\infty. \tag{1,3,7}$$

Положим при $X>0$

$$G(X)=\int_{-X}^{X} f(x)\,dx. \tag{1,3,8}$$

Нам нужно доказать, что $G(X)$ ограничено при всех X. Пусть $X_1 > 0$; составим выражение

$$F(X_1) = \frac{1}{X_1} \int_{X_1}^{2X_1} G(X)\,dX. \tag{1,3,9}$$

Из ограниченности $F(X_1)$ для всех X_1 следует ограниченность $G(X)$ для всех X. В самом деле, из (1,3,9) следует, что $G(X) \geqslant 0$ и что $G(X)$ неубывающая функция X. Из (1,3,9) имеем тогда:

$$F(X_1) > \frac{G(X_1)}{X_1} X_1 = G(X_1), \tag{1,3,10}$$

откуда следует наше утверждение. Обращаясь теперь к (1,3,6), находим

$$G(X) = \int_{-T}^{T} \frac{e^{iXt} - e^{-iXt}}{it} \varphi(t)\,dt = 2 \int_{-T}^{T} \frac{\sin Xt}{t} \varphi(t)\,dt.$$

Далее составляем $F(X_1)$ согласно (1,3,9). Имеем:

$$F(X_1) = \frac{2}{X_1} \int_{-T}^{T} \frac{\cos X_1 t - \cos 2X_1 t}{t^2} \varphi(t)\,dt =$$

$$= \frac{4}{X_1} \int_{-T}^{T} \frac{\sin^2 \frac{X_1}{2} t}{t^2} \varphi(t)\,dt - \frac{4}{X_1} \int_{-T}^{T} \frac{\sin^2 X_1 t}{t^2} \varphi(t)\,dt. \tag{1,3,11}$$

Нам надо доказать ограниченность каждого из написанных интегралов при $X_1 \to \infty$. Очевидно, достаточно рассмотреть второй интеграл. Так как $\varphi(t)$ ограничена в $[-T, T]$, то полагая $\sup\limits_{|t| \leqslant T} \varphi(t) = M$, найдем

$$\left| \frac{4}{X_1} \int_{-T}^{T} \frac{\sin^2 X_1 t}{t^2} \varphi(t)\,dt \right| \leqslant \frac{4M}{X_1} \int_{-T}^{T} \frac{\sin^2 X_1 t}{t^2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 4M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du < \infty, \tag{1,3,12}$$

что и доказывает теорему 1.3.1.

§ 4. „СТАКАНЧИКИ И. М. ВИНОГРАДОВА"

Для дальнейшего нам будет нужен набор „сглаженных пиков" — периодических функций, график которых имеет вид опрокинутых стаканчиков, гладко прилегающих к оси абсцисс. Весьма удобен набор таких функций, построенный И. М. Виноградовым и применявшийся им с исключительным успехом для изучения дробных частей различных функций (см. [3], лемма 12, стр. 260, 261).

Лемма И. М. Виноградова

Пусть $r>0$ — целое число; α, β — реальные числа; $0<\Delta<0{,}5$; $\Delta \leqslant \beta-\alpha \leqslant 1-\Delta$.

Тогда существует периодическая функция $\psi(x)$ с периодом 1 и с условиями:

1) $\psi(x)=1$ при $x \in [\alpha+0{,}5\Delta,\ \beta-05\Delta]$.

2) $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$ при $x \in [\alpha-0{,}5\Delta,\ \alpha+0{,}5\Delta]$ и $x \in [\beta-0{,}5\Delta,\ \beta+0{,}5\Delta]$

3) $\psi(x)=0$ при $x \in [\varkappa+0{,}5\Delta,\ 1+\alpha-0{,}5\Delta]$.

4) $\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\psi(x)=\beta-\alpha+\sum_{m-1}^{\infty}(a_m\cos 2\pi mx+b_m\sin 2\pi mx), \quad (1,4,1)$$

где имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&|a_m|\leqslant\frac{2}{\pi m}; \quad |b_m|\leqslant\frac{2}{\pi m};\\
&|a_m|\leqslant 2(\beta-\alpha); \quad |b_m|\leqslant 2(\beta-\alpha);\\
&|a_m|\leqslant\frac{2}{\pi m}\left(\frac{r}{\pi m\Delta}\right)^2; \quad |b_m|\leqslant\frac{2}{\pi m}\left(\frac{r}{\pi m\Delta}\right)^2.
\end{aligned}\right\} \quad (1,4,2)$$

Для доказательства рассмотрим периодическую функцию $\psi_0(\alpha)$ с периодом 1, определяемую равенствами:

$$\psi_0(x)=1 \quad \text{при } x\in(\alpha,\ \beta);$$

$$\psi_0(x)=\frac{1}{2} \quad \text{при } x=\alpha \text{ и } x=\beta;$$

$$\psi_0(x)=0 \quad \text{при } \beta<x<1+\alpha.$$

Разлагая ее в ряд Фурье, получаем

$$\psi_0(x)=\frac{a_{0,0}}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_{m,0}\cos 2\pi mx+b_{m,0}\sin 2\pi mx),$$

где

$$a_{0,0}=2\int_{\alpha}^{\beta}dx=2(\beta-\alpha);$$

$$a_{m,0}=2\int_{\alpha}^{\beta}\cos 2\pi mx\,dx=\frac{\sin 2\pi m\beta-\sin 2\pi m\alpha}{\pi m};$$

$$b_{m,0}=2\int_{\alpha}^{\beta}\sin 2\pi mx\,dx=\frac{\cos 2\pi m\alpha-\cos 2\pi m\beta}{\pi m}.$$

При заданных Δ и r ($r>0$ — целое) введем число $\delta=\frac{\Delta}{2r}$ и функцию $\psi_\rho(x)$, ($\rho=1,\ 2,\ \ldots,\ r$), полагая

$$\psi_\rho(x) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \psi_{\rho-1}(x-z)\,dz. \tag{1,4,3}$$

Мы видим, что $\psi_\rho(x)$ получается $\psi_{\rho-1}(x)$ операцией свертки: $\psi_\rho(x) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \psi_{\rho-1}(x-z)\,\chi_\delta(z)\,dz$, где $\chi_\delta(z)$ — периодическая функция, равная $\frac{1}{2\delta}$ при $x \in (-\delta, \delta)$, нулю при $x \in (\delta, 1-\delta)$ и, скажем, $\frac{1}{4\delta}$ при $x = \pm\delta$. Полагая

$$\chi_\delta(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e^{2\pi i m x},$$

находим:

$$\gamma_0 = 1; \quad \gamma_m = \frac{\sin 2\pi m\delta}{2\pi m\delta}.$$

Если непрерывной функции $f(x)$ с периодом 1 отвечает ряд Фурье $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} g_m e^{2\pi i m x}$, то свертке $\int\limits_{-1/2}^{1/2} f(x-z)\,\chi_\delta(z)\,dz$ будет отвечать ряд Фурье

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m \frac{\sin 2\pi m\delta}{2\pi m\delta}. \tag{1,4,4}$$

Учитывая разложение в ряд Фурье $\psi_\rho(x)$ и формулу (1,4,3), найдем при $\rho = 1, 2, \ldots, r$

$$\psi_\rho(x) = \beta - \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m,\rho}\cos 2\pi m x + b_{m,\rho}\sin 2\pi m x),$$

где

$$a_{m,\rho} = \frac{\sin 2\pi m\beta - \sin 2\pi m\alpha}{\pi m}\left(\frac{\sin 2\pi m\delta}{2\pi m\delta}\right)^\rho;$$

$$b_{m,\rho} = \frac{\cos 2\pi m\alpha - \cos 2\pi m\beta}{\pi m}\left(\frac{\sin 2\pi m\delta}{2\pi m\delta}\right)^\rho.$$

При $\rho = r$, ввиду $\left|\frac{\sin 2\pi m\delta}{2\pi m\delta}\right| \leqslant \frac{1}{|2\pi m\delta|} = \frac{r}{\pi m\Delta}$, находим

$$|a_{m,r}| \leqslant \frac{2}{\pi m}\left(\frac{r}{\pi m\Delta}\right)^r; \quad |b_{m,r}| \leqslant \frac{2}{\pi m}\left(\frac{r}{\pi m\Delta}\right)^r.$$

Полагая $\psi(x) = \psi_r(x)$; $a_{m,r} = a_m$; $b_{m,r} = b_m$, получаем последние из оценок (1,4,2). Предпоследние из этих оценок тривиальны, а первые получаются из того факта, что для всех значений y

$$\left|\frac{\sin y}{y}\right| \leqslant 1.$$

В самом деле, в точках максимума $\frac{\sin y}{y}$ должно быть $\left(\frac{\sin y}{y}\right)' = \frac{\cos y}{y} - \frac{\sin y}{y^2} = 0$, или $\frac{\sin y}{y} = \cos y$, что не превосходит 1 по абсолютной величине.

Далее, действуя методом индукции, легко обнаруживаем, что:

1) $\psi_\rho(x) = 1$ при $x \in [\alpha + \rho\delta,\ \beta - \rho\delta]$;

2) $0 \leqslant \psi_\rho(x) \leqslant 1$ при $x \in [\alpha - \rho\delta, \alpha + \rho\delta]$ и $x \in [\beta - \rho\delta, \beta + \rho\delta]$;

3) $\psi_\rho(x) = 0$ при $x \in [\beta + \rho\delta,\ 1 + \alpha - \rho\delta]$.

При $\rho = r$, $\psi_r(x) = \psi(x)$ получаем требуемые свойства $\psi(x)$.

Из разложения $\psi(x)$ в ряд Фурье (1,4,1) и оценок (1,4,2) выводим еще лемму.

Лемма

При $0 \leqslant \nu \leqslant r - 1$ имеем:

$$|\psi^{(\nu)}(x)| \leqslant Cr^r\Delta^{-r}, \tag{1,4,5}$$

где C — абсолютная константа.

Для доказательства замечаем, что ряд для $\psi^{(\nu)}(x)$ сходится абсолютно при $\nu \leqslant r - 1$, в силу оценок (1,4,2), и что, в силу тех же оценок,

$$|\psi^{(\nu)}(x)| \leqslant Cr^r\Delta^{-r}$$

§ 5. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ФОРМУЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТЭТА-ФУНКЦИЙ

При изучении б. д. з., имеющих гауссову компоненту, нам понадобятся свойства простейшей тэта-функции $\vartheta(\omega, \xi)$. Пусть ω — комплексное число с $\operatorname{Re}\omega > 0$ (лежащее в правой полуплоскости), а ξ — реальное число.

Тэта-функция $\vartheta(\omega, \xi)$ определяется рядом

$$\vartheta(\omega, \xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi m^2\omega)\exp 2\pi i m\xi. \tag{1,5,1}$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно по своим переменным при $\operatorname{Re}\omega \geqslant \delta_0 > 0$; при данном ω его можно рассматривать как заданное $\vartheta(\omega, \xi)$ рядом Фурье.

Для нас важна будет формула.

Теорема 1.5.1

$$\vartheta(\omega, \xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi m^2\omega)\exp 2\pi i m\xi =$$

$$= \omega^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi\frac{(\xi - m)^2}{\omega}\right). \tag{1,5,2}$$

Здесь берется значение $\omega^{-1/2}$, положительное при положительных ω.

При $\xi = 0$ формула (1,5,2) дает известную формулу преобразования простейших тэта-функций

$$\vartheta(\omega, 0) = \omega^{-1/2}\vartheta\left(\frac{1}{\omega}, 0\right). \qquad (1,5,3)$$

Для доказательства формулы (1,5,2) рассмотрим, при данных ω и ξ, вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi(m+x)^2\omega). \qquad (1,5,4)$$

Это — непрерывная периодическая функция x с периодом 1, она имеет ограниченную производную $\varphi'(x)$ и потому совпадает со своим рядом Фурье всюду. Если положим

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp 2\pi i n x, \qquad (1,5,5)$$

то

$$a_n = \int_0^1 \varphi(x)\exp(-2\pi i n x)\,dx =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^1 \exp(-\pi(m+x)^2\omega - 2\pi i n x)\,dx =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^1 \exp(-\pi(m+x)^2\omega - 2\pi i n(x+m))\,dx, \qquad (1,5,6)$$

ибо $\exp - 2\pi i n m = 1$ для любых целых m и n. Почленное сложение интегралов (1,5,6) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi y^2\omega)\exp - 2\pi i n y\,dy. \qquad (1,5,7)$$

При этом легко видеть законность такого сложения. Для вычисления интеграла (1,5,7) будем сначала считать $\omega > 0$ и введем новую переменную $v = y\sqrt{2\pi\omega}$, так что (1,5,7) перепишется в виде

$$\omega^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\exp\left(-ivn\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\right)dv. \qquad (1,5,8)$$

Написанный интеграл есть х. ф. нормального закона из $N(0,1)$ при аргументе $n\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}$. Соответственно формуле (0,2,6), (1,5,8) дает

$$\omega^{-1/2}\exp\left(-\frac{\pi n^2}{\omega}\right). \qquad (1,5,9)$$

Если теперь ω уже не положительное, а комплексное число с $\mathrm{Re}\,\omega > 0$, то для (1,5,8) сохраняется значение (1,5,9) по принципу аналитического продолжения; при этом для $\omega^{-1/2}$ берется значение, положительное при положительных ω.

Теперь (1,5,5) дает

$$\varphi(x) = \omega^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2}{\omega}\right) \exp(2\pi i n x) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\exp - \pi (m+x)^2 \omega) \qquad (1,5,10)$$

в силу (1,5,4). Далее, из (1,5,10) видно, что $\varphi(x)$ четная функция x: $\varphi(x) = \varphi(-x)$. Полагая $x = -\xi$ и заменяя ω на $\frac{1}{\omega}$ (что не выводит значений из правой полуплоскости), приходим к формуле (1,5,2).

Более подробные сведения о преобразованиях тэта-функций можно найти, например, в [7], стр. 323—340.

§ 6. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ПУАССОНА

Эта формула принадлежит к числу элементарных сведений из теории функций комплексного переменного, нужных для дальнейшего; другие сведения будут иметь более специальный характер.

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — функция комплексного переменного $z = x + iy$, регулярная внутри и на контуре круга $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$ с центром в $(\cdot)$ (x_1, y_1); $u(x, y) = \mathrm{Re} f(z)$ — реальная часть $f(z)$; $v(x, y) = \mathrm{Im} f(z)$ — мнимая часть $f(z)$.

Интегральная формула Пуассона позволяет восстановить, с точностью до константы, мнимую часть $f(z)$ по ее реальной части, или наоборот. Пусть на окружности K, $z = Re^{i\varphi}$ и $z = re^{i\psi} = x + iy$, $r < R$ — какая-либо точка внутри K. Тогда имеем:

$$v(x, y) = v(x_1, y_1) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + R\cos\varphi, y_1 + R\sin\varphi) \times$$

$$\times \frac{Rr\sin(\psi - \pi)\, d\varphi}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}. \qquad (1,6,1)$$

Доказательство см., например, в [11], стр. 95—98.

§ 7. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ПЕРЕВАЛА

Метод перевала, называемый иногда методом седловых точек или методом наискорейшего спуска, восходит еще к Б. Риману; первые его применения к проблемам теоретической физики были даны П. Дебаем в 1909 г. Нам он понадобится в применении к наиболее простому классу задач — выводу асимптотики интегралов вида

$$I(X) = \int_C \exp(Xf(z) + \psi(z))\, dz, \qquad (1,7,1)$$

при этом $f(z)$ и $\psi(z)$ будут предполагаться регулярными в некоторой односвязной замкнутой области комплексного переменного z; контур C — спрямляемый контур между данными точками A и B этой области; X — реальный параметр. По теореме Коши, значение (1,7,1) не зависит от контура C в классе спрямляемых контуров между A и B, лежащих в указанной области регулярности. Мы интересуемся асимптотикой $I(X)$ при $X \to \infty$. Примем, что при z, приближающихся к концам контура, и при $X \to \infty$ подынтегральная функция достаточно быстро стремится к 0. (Мы специально ограничиваемся описательным изложением метода перевала, имея в виду его безупречное применение в нужных нам частных случаях). Имеем:

$$|\exp(Xf(z) + \psi(z))| = \exp(X \operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Re}\psi(z)). \qquad (1,7,2)$$

Если рассмотрим поверхность модуля функции (1,7,2) в декартовых координатах u, x, y, то в виду того, что функция $X \operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Re}\psi(z)$ гармоническая, поверхность модуля не будет иметь внутри нашей области ни максимумов, ни минимумов. Если внутри области есть точки, где $Xf'(z) + \psi'(z) = 0$, то в этих точках $\frac{\partial}{\partial x}(X \operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Re}\psi(z)) = 0$; $\frac{\partial}{\partial y}(X \operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Re}\psi(z)) = 0$. В силу монотонности экспонентной функции такие точки будут *седловыми* (точками перевала) для нашей поверхности модуля: седла будут иметь простейший вид, если в этих точках $Xf''(z) + \psi''(z) \neq 0$.

Во многих случаях для вывода асимптотики $I(X)$ полезно провести контур C через точку перевала, проводя его так, чтобы выражение $X \operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Re}\psi(z)$ как можно быстрее уменьшалось (происходил наискорейший спуск). Если седло простейшего типа, то можем заметить, что линия уровня, проходящая точку перевала, для нашей поверхности модуля имеет вид $X \operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Re}\psi(z) = \mathrm{const}$, и наискорейший спуск будет происходить по ортогональной к ней траектории $X \operatorname{Im} f(z) + \operatorname{Im}\psi(z) = \mathrm{const}$. Таким образом, целесообразно выбрать контур C так, чтобы в окрестности точки перевала он проходил через эту точку и удовлетворял условию $X \operatorname{Im} f(z) + \operatorname{Im}\psi(z) = \mathrm{const}$. Мы можем рассматривать эти соображения как эвристические и, проведя контур требуемого ими вида, производить с его помощью асимптотическое вычисление $I(X)$, если это оказывается удобным. Иногда удобнее заменять этот контур на какой-либо близкий к нему, но более простой (скажем, прямолинейный) в окрестности точки перевала.

Более подробные сведения о методе перевала можно найти, например, в книге [50].

§ 8. СВОДКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СВЕДЕНИЙ ИЗ ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Целая функция есть функция, регулярная во всякой конечной части плоскости. Согласно теореме Вейерштрасса, для всякой последовательности чисел $z_1, z_2, \ldots$, имеющих единственную предельную точку $z = \infty$, существует целая функция, имеющая нули в этих и только в этих точках. Таким образом, целые функции образуют весьма обширный класс функций, среди которых выделяются целые функции конечного порядка.

Пусть $M(z) = \sup\limits_{|z| \leqslant r} |f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция.

Известно, что указанное значение достигается на контуре $|z| = r$.

В дальнейшем $f(z)$ будет обозначать целую функцию. Если существует число $A > 0$ — такое, что

$$M(r) = O\left(e^{rA}\right), \tag{1,8,1}$$

то $f(z)$ называется целой функцией конечного порядка.

Число $\rho = \inf\limits_{(A)} A$ по всем A, для которых верно (1,8,1), называется порядком $f(z)$. Таким образом,

$$\rho = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}. \tag{1,8,2}$$

Для функции конечного положительного порядка ρ вводится понятие типа τ, уточняющее понятие порядка. Целая функция $f(z)$ порядка $\rho > 0$ называется функцией типа τ, если

$$\overline{\lim_{r \to \infty}}\, r^{-\rho} \ln M(r) = \tau. \tag{1,8,3}$$

Таким образом, $f(z)$ конечного порядка ρ, если для любого $\varepsilon > 0$ $M(r) = O(\exp(r^{\rho+\varepsilon}))$, но это неверно ни для какого $\varepsilon < 0$, она будет конечного типа τ, если для любого $\varepsilon > 0$, $M(r) = O(\exp(\tau + \varepsilon) r^{\rho})$, но это неверно ни для какого $\varepsilon < 0$.

Если $\tau = \infty$, $f(z)$ называется функцией максимального (бесконечного) типа; если $\tau = 0$ — она минимального (нулевого) типа; при $0 < \infty$ она конечного типа.

Функция $f(z)$ порядка $\rho \leqslant 1$ и типа $\tau < \infty$ называется функцией экспонентного типа или экспонентного типа τ, если желательно уточнить тип.

Отметим еще выражение для порядка ρ целой функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n: \ \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln \frac{1}{|a_n|}}$$

через последовательность ее коэффициентов a_n.

Введенные величины связаны с распределением нулей $f(z)$. Пусть $n(r)$ число нулей $f(z)$ в $|z| \leqslant r$. Будем считать $f(0) = 1$, выделяя множитель $C_0 z^{m_0}$ (m_0 — кратность нуля $z = 0$). Пусть $0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots$ последовательность абсолютных величин нулей $f(z)$ (если они есть). Составим ряд при $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-\alpha}. \tag{1,8,4}$$

Точная нижняя грань ρ_1 значений α, для которых ряд (1,8,4) сходится, называется показателем сходимости нулей $f(z)$.

Минимальное целое положительное число, для которого ряд (1,8,4) сходится, обозначается $p + 1$; $p \geqslant 0$ называется родом множества нулей $f(z)$.

Если $f(z)$ порядка ρ, то $n(r) = O(r^{\rho+\varepsilon})$ при любом $\varepsilon > 0$.

Между порядком $f(z)$ ρ, показателем сходимости множества ее нулей ρ_1 и родом P множества нулей имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} &p = [\rho_1], \text{ если } \rho_1 \text{ не целое}, \\ &\rho_1 - 1 \leqslant p \leqslant \rho_1 \leqslant \rho \text{ — во всех случаях.} \end{aligned}\right\} \tag{1,8,5}$$

Для дальнейшего важна теорема Гадамара о факторизации. Для ее формулировки вводятся множители Вейерштрасса:

$$\left.\begin{aligned} &E(u, 0) = 1 - u, \\ &E(u, p) = (1-u)\exp\left(u + \frac{1}{2}u^2 + \ldots + \frac{1}{p}u^p\right) (p > 0). \end{aligned}\right\} \tag{1,8,6}$$

Пусть $\{z_n\}$; $n = 1, 2, \ldots$ последовательность комплексных чисел с неубывающими модулями и $z_1 \neq 0$, пусть ρ_1 показатель сходимости множества $\{z_n\}$ и P — род сходимости. Произведение

$$\prod(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) \tag{1,8,7}$$

сходится равномерно в каждой конечной области плоскости и представляет целую функцию. Оно называется каноническим произведением рода p.

Теорема 1.8.1

Каноническое произведение рода p есть целая функция порядка, равного показателю сходимости множества ее нулей.

Отметим еще одно свойство канонических произведений, тесно связанное с теоремой 1.8.1, которое нам понадобится в дальнейшем. Пусть $\Pi(z)$ — каноническое произведение рода p и с показателем сходимости множества нулей ρ_1. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $R_n \to \infty$ — такая, что:

$$\inf_{|z|=R_n} |\Pi(z)| \geqslant \exp\left(-R_n^{\rho_1+\varepsilon}\right), \tag{1,8,8}$$

$$\sup_{|z|=R_n} |\Pi(z)| \leqslant \exp\left(R_n^{\rho_1+\varepsilon}\right). \tag{1,8,9}$$

Доказательство этой и следующей теоремы и дополнительные сведения о целых функциях можно найти в книге [48].

Теорема 1.8.2 (теорема Ж. Гадамара о факторизации)

Если $f(x)$ целая функция порядка ρ с m-кратным нулем в начале и родом множества остальных нулей p, то имеем.

$$f(z) = z^m e^{Q(z)} \Pi(z), \tag{1,8,10}$$

где $Q(z)$ — полином степени $q \leqslant \rho$, а $\Pi(z)$ — каноническое произведение рода p, образованное нулями (отличными от $z=0$) $f(z)$.

§ 9 ПРИНЦИП ФРАГМЕНА И ЛИНДЕЛЁФА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Принцип Фрагмена и Линделёфа является важным обобщением принципа модуля. В весьма общей форме он изложен в книге [12, стр. 67—72]. Мы будем следовать этому изложению, беря более частные случаи, достаточные для трактовки дальнейшего. Таким частным видом принципа Фрагмена — Линделёфа будет являться теорема 1.9.1.

Теорема 1.9.1

Пусть $f(z)$ регулярна в некоторой области G и существует голоморфная в этой области функция $\omega(z)$, не имеющая там нулей. Пусть $f(z)(\omega(z))^\delta$ при любом $\delta > 0$ имеет предельные значения во всех точках границы G, включая бесконечно удаленную точку, если она входит в границу. Пусть на всей границе G имеем:

$$\left|f(z)(\omega(z))^\delta\right| \leqslant M, \tag{1,9,1}$$

где M не зависит от δ. Тогда

$$|f(z)| \leqslant M \tag{1,9,2}$$

по всей области G.

Для доказательства замечаем, что из (1,9,1) по принципу модуля следует, что во всей области G

$$|f(z)| \leqslant M(\omega(z))^{-\delta}$$

при любом $\delta > 0$. Так как $\omega(z) \neq 0$ и $\delta > 0$ произвольно, то отсюда следует (1,9,2). Знак равенства достигается внутри G, только если G — постоянная.

Из теоремы 1.9.1 можно вывести ряд важных следствий (см. [12], стр. 68—72).

Теорема 1.9.2

Пусть $f(z)$ регулярна в области G, граница которой содержит бесконечно удаленную точку, и пусть $|f(z)|$ ограничен в G. Если во всех конечных точках границы $|f(z)| \leqslant M$, то во всей области G

$$|f(z)| \leqslant M. \qquad (1,9,3)$$

Для доказательства рассматриваем какую-либо внутреннюю точку $z_0 \in G$ и вырезаем из G кружок C радиусом r с центром в z_0. Полагаем $\omega(z) = \frac{r}{z - z_0}$. Имеем: $f(z)(\omega(z))^\delta \to 0$ при $z \to \infty$ и любом $\delta > 0$; далее, $|\omega(z)| > 1$ при $|z - z_0| > r$, так что на всей границе области $G \setminus C$, $|f(z)(\omega(z))^\delta| \leqslant M$. Далее, на окружности $|z - z_0| = r$ имеем: $|f(z)(\omega(z))^\delta| \leqslant M_1 = \sup\limits_{|z-z_0|=r} \times$ $\times |f(z)|$. По теореме 1.9.2

$$|f(z)| \leqslant \max(M, M_1) \quad (z \in G \setminus C).$$

Пусть теперь $r \to 0$, тогда $\lim\limits_{r\to 0} M_1 = |f(z_0)|$, так что $|f(z)| \leqslant$ $\leqslant \max(M, \leqslant |f(z_0)|$ $(z \in G)$. Далее, если $|f(z_0)| > M$, то $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$ при $z \in G$, и максимальное значение $|f(z)|$ достигается внутри G, что невозможно. Итак, $|f(z_0)| \leqslant M$, что и доказывает (1,9,3).

Для дальнейшего важен случай, когда G является внутренностью некоторого угла на комплексной плоскости. Для функции $f(z) = f(re^{i\theta})$, регулярной внутри угла $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, введем, по аналогии с § 8, понятие о порядке и типе внутри этого угла. Полагая $M_f(r, \alpha, \beta) = \sup\limits_{\alpha<\theta<\beta} |f(re^{i\theta})|$, определим

$$\rho_f = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_f(r, \alpha, \beta)}{\ln r}; \quad \sigma_f = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r, \alpha, \beta)}{r^\rho} \qquad (1,9,4)$$

как порядок и тип $f(z)$ внутри угла.

Теорема 1.9.3

Пусть $f(z)$ регулярна внутри угла раствора $\frac{\pi}{\alpha}$ и непрерывна на его границе. Пусть $\rho_f < \alpha$ и на сторонах угла

$$|f(z)| \leqslant M. \qquad (1,9,5)$$

Тогда

$$|f(z)| \leqslant M \tag{1.9.6}$$

всюду внутри угла.

Можем считать, не нарушая общности, что наш угол имеет вид $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}$.

Положим $\omega(z) = \exp(-z^{\gamma}) = \exp(-r^{\gamma}e^{i\gamma\theta})$, где γ выбрано между ρ_f и α; $\rho_f < \gamma < \alpha$. Внутри нашего угла при любом $\delta > 0$

$$|f(z)(\omega(z))^{\delta}| = |f(z)|\exp(-\delta r^{\gamma}\cos\gamma\theta).$$

Далее, если $\rho < \rho_1 < \gamma$, то при $r > r_0(\rho_1)$ имеем:

$$|f(z)(\omega(z))^{\delta}| < \exp(r^{\rho_1} - \delta r^{\gamma}\cos\gamma\theta) \to 0$$

при $r \to \infty$ и $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha} < \frac{\pi}{2\gamma}$. Учитывая (1,9,5), из теоремы 1.9.1 выводим (1,9,6,).

Число $\alpha > \rho_f$, и это условие по существу. Если взять $\alpha = \rho_f$, то теорема уже не будет верна, как видно из примера, $f(z) = e^{z^{\rho}}$, $|\arc z| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$. Однако для угла раствора $\frac{\pi}{2\rho_f}$ можно дать оценку, зависящую от типа функции.

Теорема 1.9.4

Пусть функция $f(z)$ регулярна внутри угла раствора $\frac{\pi}{\rho}$ и имеет там порядок $\rho > 0$, тип $\sigma \geqslant 0$, а на сторонах этого угла

$$|f(z)| \leqslant M. \tag{1,9,7}$$

Тогда внутри всего угла

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant M\exp(\sigma r^{\rho}\cos\rho(\theta - \theta_0)), \tag{1,9,8}$$

где $\theta = \theta_0$ — бессектриса угла.

Не нарущая общности, можем считать, что угол имеет вид

$$|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}; \quad \theta_0 = 0.$$

Построим функцию

$$\varphi_{\varepsilon}(z) = f(z)\exp(-(\sigma+\varepsilon)z^{\rho}); \quad \varepsilon > 0. \tag{1,9,9}$$

Она ограничена на сторонах угла $\theta = \pm\frac{\pi}{2\rho}$ в силу (1,9,7). Далее, при $z = r > 0$ она ограничена, так как $f(z)$ порядка ρ и типа σ внутри угла. Можем применить предыдущую теорему к углам $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$ и $-\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \theta \leqslant 0$, растворов $\frac{\pi}{2\rho}$, где $2\rho > \rho > 0$. Находим $|\varphi_{\varepsilon}(z)| \leqslant M$ внутри нашего угла, т. е.

$$|f(z)| \leqslant M\exp((\sigma+\varepsilon)r^{\rho}\cos\rho\theta); \quad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}. \tag{1,9,10}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ находим (1,9,8). Для нас важно следствие к предыдущей теореме, когда $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \leqslant 1$ и типа σ, ограниченная на всей реальной оси,

$$|f(X)| \leqslant M \quad (-\infty < X < \infty). \tag{1,9,11}$$

Тогда в качестве нашего угла можно взять верхнюю полуплоскость и получится:

$$|f(z)| \leqslant M \exp \sigma r^{\rho} \cos \rho \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \leqslant M \exp(\sigma y), \tag{1,9,12}$$

где $z = x + iy$; $y \geqslant 0$. Для нижней полуплоскости будет та же оценка с заменой y на $(-y)$.

Заметим, что (в 1,9,12) случай $\rho < 1$ может быть лишь, если $f(z)$ сводится к постоянной. Ибо, по теореме 1,9,4, беря в качестве угла верхнюю полуплоскость и учитывая (1,9,11), находим (1,9,6); то же верно и для нижней полуплоскости и, по известной теореме Лиувиля, $f(z)$ сводится к постоянной.

Далее, если $f(z)$ целая функция порядка $\rho = 1$ и минимального типа $\sigma = 0$, то из (1,9,12) при наличии (1,9,11) следовало бы, что она ограничена в обеих полуплоскостях, и, стало быть, сводится к постоянной. Это замечания сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.9.5

Если целая функция $f(z)$ имеет порядок $\rho < 1$ или порядок $\rho = 1$ и минимальный тип и если $f(z) \neq \text{const}$, то она не может быть ограниченной ни на какой прямой.

§ 10. ТЕОРЕМА ПАЛЕЙ — ВИНЕРА

Теорема Палей — Винера [76] о представлении целых функций экспонентного типа, принадлежащих L^2 на какой-либо прямой, будет играть весьма важную роль в нашем изложении проблем разложения безгранично делимых законов. Существует несколько выводов этой теоремы. Наиболее естественный и прямой ее вывод с помощью преобразований Фурье требует, к сожалению, сравнительно глубоких сведений о поведении целой функции экспонентного типа в полосе около прямой, где она принадлежит L^2, и это делает прямой вывод сравнительно длинным. Поэтому здесь будет дан несколько искусственный вывод Планшереля — Полиа в изложении Н. И. Ахиезера ([1], стр. 144—150). Нам потребуются дополнительные сведения о преобразовании Бореля.

Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ целая трансцендентная функция. Покажем, что соотношения

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M(r)}{r} \leqslant \rho \tag{1,10,1}$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{n}{e}\sqrt[n]{|c_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n!\,|c_n|}\leqslant\rho \qquad (1,10,2)$$

эквивалентны.

Выведем сперва (1,10,2) из (1,10,1). В известных неравенствах Коши

$$|c_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\dots)$$

положим $r=\frac{n}{\rho+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Из (1,10,2) при всех $n\geqslant N(\varepsilon)$ следует, что

$$|c_n|\leqslant\frac{e^n(\rho+\varepsilon)^n}{n^n}\quad\text{или}\quad\frac{n}{e}\sqrt[n]{|c_n|}\leqslant\rho+\varepsilon,$$

что дает (1,10,2). Обратно, пусть дано (1,10,2). Имеем: $M(r)\leqslant\leqslant|c_0|+|c_1|r+|c_2|r^2+\dots$ В силу (1,10,2) при $n\geqslant N(\varepsilon)$ имеем:

$$|c_n|\leqslant\frac{\left(\rho+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}{n!}$$

и

$$M(r)<\sum_{k=0}^{N(\varepsilon)-1}|c_k|r^k+\exp\left(r\left(\rho+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Отсюда для всех $r\geqslant R(\varepsilon)$

$$M(r)<\exp r(\sigma+\varepsilon),$$

что дает (1,10,1). Таким образом, получается характеристика функций экспонентного типа $\leqslant\rho$ через коэффициенты их ряда Маклорена.

Перейдем к понятию преобразования Бореля. Пусть дана целая функция экспонентного типа ρ

$$f(z)=a_0+\frac{a_1}{1!}z+\frac{a_2}{2!}z^2+\dots \qquad (1,10,3)$$

Составим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho. \qquad (1,10,4)$$

Составим ряд Лорана

$$g(z)=\frac{a_0}{z}+\frac{a_1}{z^2}+\dots+\frac{a_n}{z^{n+1}}\cdot \qquad (1,10,5)$$

Он будет сходиться при $|z|>\rho$. Функции $f(z)$ и $g(z)$, таким образом, одноoднозначно сопоставляются.

Пусть $0\leqslant\theta<2\pi$; возьмем полупрямую $z=re^{-i\theta}$ $(0\leqslant r<<\infty)$ и проведем окружность $|z|=\rho$. В точке $z=\rho e^{i\theta}$, диаметрально противоположной пересечению нашей полупрямой с окружностью, проведем касательную к окружности $|z|=\rho$ и рассмотрим полуплоскость, ограниченную этой касательной и не содержащую нашей полупрямой. Эту плоскость обозначим Δ_θ. Преобразованием Бореля функции $f(z)$ для полуплоскости Δ_θ называется интеграл

$$\int_0^\infty f(\zeta)\, e^{-z\zeta} d\zeta = g(z,\ \theta). \qquad (1,10,6)$$

Покажем, что он сходится абсолютно и равномерно во всякой замкнутой области, содержащейся в Δ_θ, и является, таким образом, аналитической функцией, регулярной внутри Δ_θ.

Пусть дана замкнутая область $D\subset\Delta_\theta$, лежащая внутри Δ_θ. Тогда существует $\delta>0$ такое, что расстояние всякой точки D от границы Δ_θ, больше δ. Это равносильно неравенству

$$R(ze^{-i\theta}) = x\cos\theta + y\sin\theta > \rho+\delta; \quad z\in D. \qquad (1,10,7)$$

Так как $f(z)$ экспонентного типа ρ, то

$$|f(z) \leqslant C\exp\left(\left(\rho+\frac{\delta}{2}\right)|z|\right) \qquad (1,10,8)$$

при подходящей константе $C>0$. Отсюда, при $z\in D$, $\zeta=re^{-i\theta}$

$$|f(\zeta)\, e^{-z\zeta}| \leqslant C\exp\left(-\frac{\delta}{2}r\right)$$

и

$$\int_0^\infty |f(\zeta)\, e^{-z\zeta}||d\zeta| \leqslant C\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\delta}{2}r\right)dr = \frac{2C}{\delta} < \infty, \qquad (1,10,9)$$

что и доказывает требуемое.

Покажем теперь, что при $z\in\Delta_\theta$

$$g(z,\ \theta) = g(z). \qquad (1,10,10)$$

Пусть взята точка $z\in\Delta_\theta$ такая, что $R(e^{-i\theta}z)>\rho+\delta,(\delta>0)$.

Заменим в подынтегральной функции (1,10,6) z на $z\dfrac{\rho+\delta/2}{\rho+\delta}$, составим равенство

$$f(\zeta) = \exp\left(-z\zeta\frac{\rho+\frac{\delta}{2}}{\rho+\delta}\right) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{k!}\zeta^k \exp\left(-z\zeta\frac{\rho+\frac{\delta}{2}}{\rho+\delta}\right) \qquad (1,10,11)$$

и проинтегрируем его (пока формально) по полупрямой $\zeta=$ $=re^{-i\theta}$ почленно. Получим

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{k!}\left(z\,\frac{\rho+\delta/2}{\rho+\delta}\right)^{-k}\Gamma(k+1) = \sum_{k=0}^\infty a_k\left(z\frac{\rho+\delta/2}{\rho+\delta}\right)^{+k}. \qquad (1,10,12)$$

Так как $|z| > \rho + \delta$, то выражение (1,10,12) совпадает с $g\left(z\frac{\rho + \delta/2}{\rho + \delta}\right)$. Таким образом, достаточно доказать равномерную сходимость (1,10,11) на полупрямой $\zeta = re^{-i\theta}$, чтобы обосновать законность почленного интегрирования и полностью доказать (1,10,10). Ввиду (1,10,4) имеем:

$$|a_k| \leqslant C\left(\rho + \frac{\delta}{4}\right)^k.$$

Далее, $\mathrm{Re}^{-i\theta} z > \rho + \delta$. Отсюда

$$\left|\frac{a_k}{k!}\zeta^k \exp - z\zeta\frac{\rho + \delta/2}{\rho + \delta}\right| \leqslant C\frac{(\rho + \delta/4)^k}{k!} r^k \exp - \left(\rho + \frac{\delta}{2}\right) r. \quad (1,10,13)$$

Выражение справа представляет собой члены ряда $C\exp - \left(\rho + \frac{\delta}{2}\right) r \exp\left(\rho + \frac{\delta}{4}\right)$, что и доказывает законность нашей операции.

Переходим к теореме Палей—Винера [76]. Она касается целых функций экспонентного типа τ (таких, что $M(r) = O(\exp(\tau + \varepsilon) r)$ для любого $\varepsilon > 0$), принадлежащих $L^2(-\infty, \infty)$ на какой-либо прямой.

Теорема 1.10.1 (теорема Палей — Винера)

Для того, чтобы целая функция экспонентного типа принадлежала $L^2(-\infty, \infty)$ на реальной оси

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (1,10,14)$$

необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$f(z) = \int_{-\tau}^{\tau} e^{izt}\Phi(t)\, dt, \quad (1,10,15)$$

где $\Phi(t) \in L^2(-\tau, \tau)$.

Достаточность этого условия доказывается просто по известной теореме теории преобразований Фурье (равенство 1,3,7). Во-первых,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\tau}^{\tau} |\Phi(t)|^2 dt < \infty.$$

Во-вторых, покажем, что $f(z)$ экспонентного типа τ. Полагая $z = x + iy$, найдем

$$f(z) = f(x + iy) = \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} e^{-ty}\Phi(t)\, dt,$$

откуда по неравенству Коши — Буняковского

$$|f(z)|^2 \leqslant \int_{-\tau}^{\tau} |\Phi(t)|^2 dt \int_{-\tau}^{\tau} e^{-2ty} dt =$$

$$= \int_{-\tau}^{\tau} |\Phi(t)|^2 dt \frac{e^{2\tau y} - e^{-2\tau y}}{y} \leqslant Ce^{2\tau y} \leqslant Ce^{2\tau |z|}$$

при подходящей константе $C > 0$, откуда следует, что $|f(z)| \leqslant C_1 e^{\tau |z|}$ при $C_1 = \sqrt{C}$.

Перейдем теперь к доказательству необходимости условия (1,10,15) (по Планшерелю и Полиа, в изложении Н. И. Ахиезера [1]). Пусть $\varphi(t)$ преобразование Фурье $f(x)$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x)\, dx \tag{1,10,16}$$

(равенство понимается в смысле l.i.m. (см. § 3 этой главы)).

Имеем:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t)\, dt. \tag{1,10,17}$$

Для нашей цели достаточно доказать, что $\varphi(t) = 0$ почти везде вне сегмента $|t| \leqslant \tau$, т. е, почти везде при $|t| > \tau$.

По функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!}$ построим функцию

$$g(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \ldots \quad (|z| > \tau) \tag{1,10,18}$$

и покажем, что $g(z)$ регулярна в плоскости с разрезом вдоль отрезка мнимой оси $-\tau \leqslant y \leqslant \tau$, $x = 0$.

Построим преобразования Бореля при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$:

$$g_+(x + iy) = \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-\xi(x+iy)} d\xi = g(x + iy), \tag{1,10,19}$$

$$g_-(x + iy) = -\int_0^{\infty} f(-\xi) e^{\xi(x+iy)} d\xi = -$$

$$= -\int_0^{\infty} f(\xi) e^{-\xi(x+iy)} d\xi = g(x + iy). \tag{1,10,20}$$

Согласно изложенному выше о преобразованиях Бореля, эти формулы имеют смысл и место соответственно при $x > \tau$ и $x < -\tau$.

Но из того, что $f(\xi) \in L^2(-\infty, \infty)$, применением неравенства Коши — Буняковского получаем, что наши интегралы сходятся абсолютно и равномерно соответственно при $x \geqslant \varepsilon > 0$ и $x \leqslant -\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, так что ряд (1,10,18) и формулы (1,10,19) и (1,10,20) определяют $g(z)$ как функцию, регулярную в комплексной плоскости $z = x + iy$ с разрезом $-\tau \leqslant y \leqslant \tau$, $x = 0$.

Стало быть, при $y \bar{\in} [-\tau, \tau]$ имеем соответственно:

$$g_+(iy + 0) = \lim_{\varepsilon \to 0} g_+(iy + \varepsilon) = g(iy),$$

$$g_-(iy - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} g_-(iy - \varepsilon) = g(iy).$$

В силу (1,10,10) $g_+(iy + \varepsilon)$ есть умноженное на $\sqrt{2\pi}$ преобразование Фурье функции

$$f_+(x, \varepsilon) = \begin{cases} f(x) e^{-\varepsilon x} & (x \geqslant 0) \\ 0 & (x < 0), \end{cases} \qquad (1,10,21)$$

принадлежащей $L^2(-\infty, \infty)$. Далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_+(x, \varepsilon) - f_+(x, 0)|^2 dx = \int_0^{\infty} |f(x)|^2 (1 - e^{-\varepsilon x})^2 dx \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Пусть $\varphi_+(y)$ — преобразование Фурье $f_+(x, 0)$, тогда преобразование Фурье функции $f_+(x, \varepsilon) - f_+(x, 0)$, т. е. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_+(iy + \varepsilon) - \varphi_+(y)$, должно стремиться к 0 в смысле нормы в $L^2(-\infty, \infty)$, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_+(iy + \varepsilon) - \varphi_+(y) \right|^2 dy = 0. \qquad (1,10,22)$$

Но при $y > \rho$ и $y < -\rho$, $g_+(iy + \varepsilon) \to g(iy)$ при $\varepsilon \to 0$.

Притом это стремление равномерно при $\rho + \varepsilon_1 \leqslant y \leqslant Y_0$, где $\varepsilon_1 > 0$ сколь угодно мало, а Y_0 сколь угодно велико.

Ввиду этого (1,10,22) даёт

$$\varphi_+(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(iy) \qquad (1,10,23)$$

почти для всех y при $y > \rho$ и $y < -\rho$.

Аналогично, беря $g_-(iy - \varepsilon)$, находим, что почти для всех $y < -\rho$, будет

$$\varphi_-(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(iy), \qquad (1,10,24)$$

где $\varphi_-(y)$ определяется аналогично $\varphi_+(y)$. Далее, $\varphi(y) = \varphi_+(y) + \varphi_-(y)$ есть преобразование Фурье $f(x)$, и из (1,10,23) и (1,10,24) следует, что это преобразование Фурье равно 0, если $y > \rho$ или $y < -\rho$. Таким образом, (1,10,17) обращается в формулу

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}\varphi(t)\,dt. \qquad (1,10,25)$$

Так как справа и слева стоят целые функции от x, то это равенство верно для всех x, а не только почти для всех.

В силу того же соображения равенство (1,10,25) имеет место при любых комплексных значениях $x=z$

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\tau}^{\tau} e^{izt}\varphi(t)\,dt. \qquad (1,10,26)$$

Полагая $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi(t)$, приходим к (1,10,15).

Нам будет полезно следующее видоизменение теоремы Палей — Винера.*

Теорема 1.10.2

Пусть целая функция $f(z)$ принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$ на реальной оси и пусть для любого $\varepsilon>0$

$$f(z)=O(\exp|z|^{a+\varepsilon}) \quad \textit{при } Iz=y>0, \qquad (1,10,27)$$

$$f(z)=O(\exp|z|^{b+\varepsilon} \quad \textit{при } Iz=y\leqslant 0, \qquad (1,10,28)$$

где $0\leqslant b<a<\infty$. Тогда

$$f(z)=\int_{b}^{a} e^{izt}\Phi(t)\,dt, \qquad (1,10,29)$$

где $\Phi(t)\in L^2(b, a)$.

Заметим, что из (1,10,27) и (1,10,28) следует, что $f(iy)= = O(\exp|y|^{b+\varepsilon})$.

Заметим далее, что $f(z)$ целая функция экспонентного типа a, так что из теоремы Палей — Винера вытекает соотношение

$$f(z)=\int_{-a}^{a} e^{izt}\Phi(t)\,dt,\ \Phi(t\in L^2(-a, a), \qquad (1,10,30)$$

откуда следует ограниченность $f(z)$ на реальной оси

$$|f(x)|\leqslant M. \qquad (1,10,31)$$

Далее, следствие (1,9,12) из теоремы 1.9.4, примененное к $f(z)$ и правой и левой полуплоскости дает

$$|f(x+iy)|\leqslant M\exp(ay) \quad (y\geqslant 0), \qquad (1,10,32)$$

$$|f(x+iy)|\leqslant M\exp(b|y|) \quad (y\leqslant 0). \qquad (1,10,33).$$

---

* Это видоизменение указано автору Д. К. Фаддеевым без доказательства. Автору неизвестно, ново ли оно.

Введем теперь в рассмотрение целую функцию

$$f_1(z) = f(z)\exp\left(\frac{a-b}{2}iz\right). \tag{1,10,34}$$

Очевидно, $f_1(x) \in L^2(-\infty, \infty)$. Далее, из (1,10,32) и (1,10,33) находим

$$|f_1(x+iy)| \leqslant M\exp\left(\frac{a+b}{2}y\right) \quad (y \geqslant 0), \tag{1,10,35}$$

$$|f_1(x+iy)| \leqslant M\exp\left(\frac{a+b}{2}|y|\right) \quad (y \leqslant 0). \tag{1,10,36}$$

Таким образом, $f_1(z)$ экспонентного типа $\frac{a+b}{2}$, f и $f_1(x) \in L^2(-\infty, \infty)$. По теореме Палей — Винера

$$f_1(z) = \int\limits_{-\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} e^{izt}\Phi_1(t)\,dt; \qquad \Phi_1(t) \in L^2\left(-\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

или

$$f(z) = \int\limits_{-\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}} \exp iz\left(t-\frac{a-b}{2}\right)\Phi_1(t)\,dt. \tag{1,10,37}$$

Полагая $t - \frac{a-b}{2} = u$, находим

$$f(z) = \int\limits_{-b}^{a} e^{izu}\Phi(u)\,du, \quad \Phi(u) \in L^2(-b, a), \tag{1,10,38}$$

что и доказывает теорему.

§ 11. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Нам понадобится одна теорема о степенных рядах с неотрицательными коэффициентами.

Теорема 1.11.1 (А. Прингсхейм — Э. Ландау).

Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — ряд с неотрицательными коэффициентами, сходящийся в каком-либо круге $|z| < R$, $R > 0$. Тогда одна из ближайших к $z = 0$ особых точек $f(z)$ лежит на положительной оси.

Доказательство этой теоремы см., например, у Е. С. Тичмарша [37, стр. 243—244].

Глава вторая

СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Как уже было сказано, мы будем заниматься здесь только характеристическими функциями (х. ф.) одномерных случайных величин X. Если з. р. X есть $F(x)$, то х. ф. $\varphi(t)$ для X задается формулой для всех реальных значений t

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x).$$

Мы будем здесь излагать не только свойства х. ф., нужные нам для задач теории разложения вероятностных законов, но также связанные с такими свойствами мало известные и некоторые новые сведения о х. ф.

§ 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Теорема Г. Пойа

Рассматривая выражение для х. ф.

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)=Ee^{itX}, \tag{2,1,1}$$

мы видим, что $\varphi(0)=1$, $|\varphi(t)|\leqslant 1$ и что $\varphi(t)$ непрерывная функция t. Далее, видим, что

$$\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$$

(„эрмитовость“ х. ф. $\varphi(t)$).

Если над случайной величиной X произведена линейная подстановка $Y=aX+b$, то

$$\varphi_Y(t)=Ee^{iYt}=Ee^{it(aX+b)}=e^{ibt}\varphi(at),$$

где $\overline{\varphi}$ х. ф. X. В частности, $(-X)$ имеет х. ф. $\varphi(-t)=$ $=\overline{\varphi(t)}$.

Если $F(x)$ симметричный закон распределения, то $\varphi(t)=$ $=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos txdF(x)$ — четная реальная функция t. Обратно, если х. ф. $\varphi(t)$ реальна, то она четна, и соответствующий з. р. симметрический.

Если $Z=X_1-X_2$, где X_1 и X_2 независимы и одинаково распределены, и $\varphi(t)$ — х. ф. X_1, то

$$\varphi_Z(t)=Ee^{iZt}=\varphi(t)\varphi(-t)=\varphi(t)\overline{\varphi(t)}=|\varphi(t)|^2.$$

Рассмотрение последовательностей з. р. $F_1(x)$, $F_2(x),\ldots$, $F_n(x),\ldots$ и отвечающих им х. ф. $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots$, $\varphi_n(t),\ldots$ приводит к предельным теоремам.

Теорема 2.1.1.

Если последовательность з. р. $\{F_n(x)\}$ слабо сходится (см. введение, § 2) к з. р. $F(x)$, то последовательность х. ф. $\{\varphi_n(t)\}$ сходится к х. ф. $\varphi(t)$ этого з. р. и притом равномерно в каждом конечном сегменте значений t.

Теорема 2.1.2

Если последовательность х. ф. $\{\varphi_n(t)\}$ сходится к непрерывной функции $\varphi(t)$, то последовательность соответствующих з. р. $\{F_n(x)\}$ слабо сходится к з. р. $F(x)$, и притом $\varphi(t)$ есть х. ф. для $F(x)$.

Доказательства этих теорем см. в курсе Б. В. Гнеденко [5, стр. 223—227]. Обратим внимание на требование непрерывности предельной функции $\varphi(t)$ в теореме 2.1.2. Это требование существенно, от него нельзя отказаться, как показывает следующий пример, пусть $\varphi_n(t)=\exp-\frac{nt^2}{2}$ (х. ф. нормальной случайной величины $X_n \in N(0, \sqrt{n})$). При $n\to\infty$, $\varphi_n(t)\to 1$, если $t=0$, и $\varphi_n(t)\to 0$, если $t\neq 0$. Предельная функция разрывна и потому не может быть х. ф.

Указанные теоремы, помимо их значения для теории предельных теоретико-вероятностных теорем, позволяют также конструировать интересные примеры х. ф., исходя из простейших х. ф. Очевидно, х. ф. образуют выпуклое множество, т. е. если $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$ х. ф., а $q_1, q_2,\ldots, q_n$ неотрицательные числа, такие, что $q_1+q_2+\ldots+q_n=1$, то $q_1\varphi_1(t)+$ $+q_2\varphi_2(t)+\ldots+q_n\varphi_n(t)$ — х. ф. С помощью теоремы 2.1.2 можем распространить это высказывание на случай бесконечной последовательности чисел $q_i\geqslant 0$, дающих в сумме 1. В самом деле, рассмотрим последовательность х. ф.

$$\mathrm{X}_n(t) = \frac{q_1\varphi_1(t) + \ldots + q_n\varphi_n(t)}{q_1 + \ldots + q_n}. \qquad (2,1,2)$$

Так как $|\varphi_i(t)| \leqslant 1$, то при $n \to \infty$, $\mathrm{X}_n(t)$ сходится равномерно по t для всех значений t и потому представляет непрерывную функцию t (все $\varphi_i(t)$ непрерывны, как х. ф.).

Ввиду этого

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{X}_n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i\varphi_i(t) = \varphi(t) \qquad (2,1,3)$$

есть х. ф.

Заметим еще, что если $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ х. ф. случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то их произведение $\varphi_1(t)\varphi_2(t)\ldots\varphi_n(t) = \varphi(t)$ есть также х. ф., а именно х. ф. суммы независимых величин $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. В частности, любая целая положительная степень $(\varphi(t))^n$ х. ф. $\varphi(t)$ есть х. ф. Далее, $|\varphi(t)|^2$ также х. ф., ибо $|\varphi(t)|^2 = \varphi(t)\overline{\varphi(t)} = \varphi(t)\varphi(-t)$, и $\varphi(-t)$ — х. ф.

Это замечание и операция (2,1,3) позволяют строить многие интересные примеры х. ф.

Пусть $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ — степенной ряд с неотрицательными коэффициентами, сходящийся при $z = 1$, так что

$$g(1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m.$$

Пусть $f(t)$ — х. ф. Тогда $\varphi_m(t) = (f(t))^m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ — х. ф. Применяя (2,1,3), находим, что

$$\varphi(t) = \frac{1}{g(1)} g(f(t)) \qquad (2,1,4)$$

есть х. ф. Случайная величина X, которой она отвечает, связана простыми вероятностными соотношениями со случайной величиной Z, имеющей х. ф. $f(t)$. Пусть Z есть некоторая случайная числовая характеристика частицы вещества. Пусть другая, более крупная частица имеет вероятность распасться на m данных частиц, равную $\frac{a_m}{g(1)}$, и мы интересуемся суммарным эффектом $Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_m$, независимых и одинаково распределенных с х. ф. $f(t)$ числовых характеристик Z_i отдельных частиц. Априорный суммарный эффект будет отвечать х. ф. $\varphi(t)$.

Рассмотрим различные примеры правила (2,1,4). Пусть $f(t) = e^{it}$ — х. ф. несобственной случайной величины, равной 1 с вероятностью 1; положим $g(z) = e^{\lambda z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} z^m$ $(\lambda > 0)$; $g(1) = e^{\lambda}$. Тогда

$$\varphi(t) = \exp\lambda(e^{it} - 1)$$

есть х. ф. В самом деле, это х. ф. закона Пуассона.

Беря $f(t) = e^{-\alpha t^2}$ $(\alpha > 0)$, получим, что

$$\varphi(t) = \exp(e^{-\alpha t^2} - 1)$$

х. ф. Степенной ряд $g(z) = \exp(e^{\lambda z})$ также имеет неотрицательные коэффициенты, так что

$$\varphi_1(t) = \exp(e^{\lambda e^{it}} - e^{\lambda}); \quad \varphi_2(t) = \exp(e^{\lambda e^{-\alpha t^2}} - e^{\lambda})$$

суть х. ф. Можно строить и дальнейшие примеры, заменяя $g(z)$ на $\exp(\exp e^{\lambda z})$ и т. д.

Э. Лукач [71] указывает пример: при любом целом $n \geqslant 1$, и $p > 1$

$$\varphi_n(t) = \left(\frac{p-1}{p-f(t)}\right)^{1/n} \tag{2,1,5}$$

есть х. ф., если $f(t)$ — х. ф. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что ряд $g_n(z) = \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1/n}$ имеет неотрицательные коэффициенты. Это следует из известной формулы бинома Ньютона: m-й биномиальный коэффициент имеет вид

$$\frac{(-1)^m}{m!} - \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n} - 1\right)\ldots\left(-\frac{1}{n} - (m-1)\right) > 0.$$

Все эти примеры дают х. ф. безгранично делимых законов. В самом деле, наряду со всякой построенной таким образом $\varphi(t)$, также $(\varphi(t))^{1/k}$ при любом $k > 1$ будет х. ф., это и означает, что $\varphi(t)$ — х. ф. б. д. з. (см., например, [44]).

Другие примеры можем получить, рассматривая функцию $V(x)$, неубывающую к ограниченной вариации на сегменте $[0, M]$. Полагая

$$g(z) = \int_0^M e^{xz}\, dV(x),$$

можем заметить, что если $f(t)$ х. ф., то

$$\frac{g(f(t))}{g(\theta)} \tag{2,1,6}$$

есть х. ф. Мы приходим к этому утверждению, рассматривая разложение $e^{xf(t)}$ по степеням x.

Некоторые интересные примеры образования х. ф. получены В. М. Золотаревым.* Они получаются из аналогов (2,1,6). Мы приведем их здесь без доказательства.

Если $\varphi(t)$ х. ф., то

$$g(t) = \frac{\varphi(t) - 1}{it\varphi'(0)} \text{ — х. ф.}$$

---

* Сообщено автору в декабре 1959 г.

Если $\varphi(t)$ — х. ф. з. р., сосредоточенного на положительной оси $[0, \infty)$, и $\nu > 0$, а $e^{\psi(t)}$ — х. ф. безгранично делимого закона, то

$$\varphi(-i\nu\psi(t)) \text{ — х. ф.}$$

В частности, если $f(t)$ — любая х. ф., а $\varphi(t)$ — х. ф. описанного выше вида, то

$$\varphi(i(1-f(t))) \text{ — х. ф.}$$

Много полезных примеров и интересных свойств х. ф. обнаруживается с помощью теоремы Г. Пойа [79].

Теорема 2.1.3 (теорема Г. Пойа)

Пусть $\varphi(t)$ неотрицательна, четна, непрерывна, выпукла книзу при $t > 0$ и $t < 0$, $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда $\varphi(t)$ — характеристическая функция.

Мы докажем эту теорему, следуя в основном Д. Дюгэ [60], где она дана в несколько расширенном виде.

Нужные нам свойства выпуклых функций изложены в § 1 гл. 1. Мы знаем, что $\varphi(t) = \varphi(0) + \int\limits_0^t \psi(u)\,du$, где $\psi(u)$ не убывает, не положительна, $\psi(u) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\psi(t) = \varphi'(t)$ почти везде. Рассмотрим поведение $\varphi(t)$ при $t > 0$. Если $\varphi(\xi) = 0$ при $\xi > 0$, то $\varphi(t) = 0$ при $t \geqslant \xi$, как явствует из свойств $\varphi(t)$. Если же $\varphi(t)$ нигде не обращается в 0, то сделаем следующее построение. В каждом сегменте $[n, n+1]$ выбираем точку t_n, где $\varphi'(t_n)$ существует и $\varphi'(t_n) < 0$ (если таких точек нет, то $\varphi(t) = 0$ при $t \geqslant n+1$, что принято невозможным). В точке $(t_n, \varphi(t_n))$ проводим касательную к графику $\varphi(t)$ и продолжаем ее до пересечения с осью положительных значений t в $(\cdot)$ T_n. Определим новую функцию $\varphi_n(t)$, график которой при $t \geqslant 0$ совпадает с графиком $\varphi(t)$ при $t \leqslant t_n$, с касательной при $t_n \leqslant t \leqslant T_n$ и с осью значений t при $t \geqslant T_n$ (так что $\varphi(t) = 0$ при $t \geqslant T_n$); при $t < 0$ проводится симметричная конструкция. Тогда $\varphi_n(t)$ будет обладать теми же свойствами, что и $\varphi(t)$.

Если же исходная $\varphi(t)$ обращается в 0 при $|t| \geqslant T$, то будем все $\varphi_n(t)$ считать просто совпадающими с $\varphi(t)$.

Рассмотрим теперь преобразование Фурье для $\varphi_n(t)$ вида

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T_n}^{T_n} e^{-itx} \varphi_n(t)\,dt \tag{2,1,7}$$

и покажем, что $f_n(x) \geqslant 0$ для всех значений x. Это ясно при $x = 0$; кроме того, $f_n(x)$, очевидно, четная функция, так что достаточно доказать это при $x > 0$. Имеем:

$$f_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{T_n}\cos tx\varphi_n(t)\,dt=-\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin tx}{x}\,\varphi_n(t)\Big|_0^{T_n}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{T_n}\frac{\sin tx}{x}\,\varphi_n'(t)\,dt=-\int_0^{T_n}\frac{\sin tx}{x}\,\varphi_n'(t)\,dt. \qquad (2,1,8)$$

Здесь $\varphi_n'(t)<0$ — неубывающая функция (ибо $\varphi_n(t)$ обладает теми же свойствами, что $\varphi(t)$).

Интеграл (2,1,8) при данном $x>0$ разобьем на сегменты: $\left[0, \frac{\pi}{x}\right]$; $\left[\frac{\pi}{x}, \frac{2\pi}{x}\right]$; $\left[\frac{2\pi}{x}, \frac{3\pi}{x}\right], \ldots$, тогда (2,1,8) дает

$$f_n(x)=\int_0^{\frac{\pi}{x}}\sin tx\left(-\varphi_n'(t)-\varphi_n'\left(t+\frac{\pi}{x}\right)-\varphi_n'\left(t+\frac{2\pi}{x}\right)-\ldots\right)dt. \qquad (2,1,9)$$

В скобках здесь стоит знакопеременный ряд убывающих членов $\left(\text{который обрывается при } t+\frac{2\pi}{x}\geqslant T_n\text{, и потому законность записи (2,1,9) не вызывает сомнения}\right)$. Таким образом, выражение в скобках неотрицательно, и такова же функция $\sin tx$ при $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{x}$. Таким образом, $f_n(x)\geqslant 0$ при всех x.

На основании теоремы 1.3.1 заключаем, что $f_n(x)\in L_1(-\infty, \infty)$ (замена x на $(-x)$ в формулировке теоремы 1.3.1, разумеется, не меняет результата). Покажем еще, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)\,dx=1. \qquad (2,1,10)$$

В самом деле (см. § 3, гл. 1), $\varphi_n(t)$ будет преобразованием Фурье для $f_n(x)$, $\varphi_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f_n(x)\,dx$, притом $\varphi_n(t)$ непрерывна при $|t|<T$, так что равенство имеет место для всех $t\in(-T, T)$. При $t=0$ имеем: $\varphi_n(0)=1=\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)\,dx$. Таким образом, $f_n(x)$ есть вероятностная плотность, а $\varphi_n(t)$ — соответствующая х. ф.

Далее, при $n\to\infty$ х. ф. $\varphi_n(t)$ стремится к непрерывной функции $\varphi(t)$, так что по теореме 2.1.2 $\varphi(t)$ — х. ф., и теорема Г. Пойа доказана.

Заметим здесь же, что в то время как вспомогательные $\varphi_n(t)$ (сосредоточенные на конечных сегментах) отвечают вероятностным плотностям $f_n(x)$, исходная функция $\varphi(t)$

может быть х. ф. случайной величины X, не имеющей плотности вероятности при $x=0$. Примером такого явления может служить $\varphi(t)=\frac{1}{(1+|t|)^{\gamma}}$ при $0<\gamma<1$. Здесь $\varphi''(t)=\gamma(\gamma+1)\times\times\frac{1}{(1+t)^{\gamma+2}}$ при $t>0$, так что она выпукла при $t>0$ и $t<0$. Однако при $x=0$ вероятностной плотности не существует.

Построение функций $\varphi_n(t)$ в нашем доказательстве теоремы 2.1.3 приводит еще к следующему факту: существуют х. ф., совпадающие в окрестности нуля, а далее различающиеся. Такими будут $\varphi_{n_1}(t)$ и $\varphi_{n_2}(t)$ при достаточно большой разности n_2-n_1, если исходная функция $\varphi(t)$ нигде не обращалась в 0.

Впервые примеры таких пар х. ф. были построены Б. В. Гнеденко [4], эти примеры мы рассмотрим в дальнейшем.

Теорема Г. Пойа доставляет ряд интересных примеров х. ф. Согласно этой теореме, например,

$$\varphi(t)=\frac{1}{1+|t|^{\sigma}} \tag{2,1,11}$$

при $0<\sigma\leqslant 1$ будет х. ф. В самом деле, при $t>0$

$$\varphi''(t)=\sigma(1-\sigma)\,t^{\sigma-2}\frac{1}{(1+t^{\sigma})^2}+\frac{2\sigma^2t^{2\sigma-2}}{(1+t^{\sigma})^3}>0.$$

При любом $N>0$ $\varphi\left(\frac{t}{N}\right)$ будет х. ф. Пусть N таково, что $N^{\sigma}=n$ — целое число, тогда

$$\left(\varphi\left(\frac{t}{N}\right)\right)^n=\left(\frac{1}{1+|t|^{\sigma}n^{-1}}\right)^n \tag{2,1,12}$$

будет х. ф. При $n\to\infty$ по теореме 2.1.2 находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\varphi\left(\frac{t}{N}\right)\right)^n=e^{-|t|^{\sigma}} \tag{2,1,13}$$

будет х. ф. Это известная х. ф. симметрического устойчивого закона с показанием $\sigma\leqslant 1$. То, что (2,1,13) есть х. ф. можно вывести и непосредственно из теоремы 2.1.3.

Покажем, что и при $1<\sigma\leqslant 2$ (2,1,11) будет х. ф. (см. [16], § 48). При $\sigma=2$, (2,1,11) дает $\frac{1}{1+t^2}$, известную х. ф. для распределения типа X_2^2. Впрочем, результат для $\sigma=2$ мы можем получить по теореме 2.1.2, переходя к пределу при $\sigma\to 2-0$. Пусть $1<\sigma\leqslant 2$. Функция $v(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{it\xi u}\varphi(u)\,du$ четна, при $\xi\geqslant 0$

$$v(\xi)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re} M(\xi), \text{ где } M(\xi)=\int_0^\infty \frac{e^{i\xi u}}{1+u^\sigma}\,du.$$

Рассмотрим плоскость комплексного переменного u, разрезанную вдоль всей положительной оси. Функция $\frac{1}{1+u^\sigma}$ не имеет особенностей в первом квадранте: из $u^\sigma=-1$ следовало бы $|u|=1$, $\arg u=\frac{2k+1}{\sigma}\pi$ $\left(k\geqslant 0 \text{ целое; } \frac{2k+1}{\sigma}\pi<2\pi\right)$. Ввиду того, что $1<\sigma<2$, указанные значения $\arg u$ лежат вне первого квадранта. Ввиду того, что $\sigma>1$, легко заключаем, что контур интегрирования (верхний берег разреза) можно повернуть на 90° против часовой стрелки, так что он ляжет на мнимую ось. Тогда получим

$$M(\xi)=\int_0^\infty \frac{e^{-\xi u}i\,du}{1+i^\sigma u^\sigma}=\int_0^\infty \frac{e^{-\xi u}i\left(1-e^{\frac{\pi i}{2}\sigma}u^\sigma\right)}{\left|1+e^{\frac{\pi i}{2}\sigma}u^\sigma\right|^2}\,du,$$

откуда

$$v(\xi)=\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}\sigma\int_0^\infty \frac{e^{-\xi u}u^\sigma\,du}{\left|1+e^{\frac{\pi i}{2}\sigma}u^\sigma\right|^2}>0.$$

Это доказывает, что $\varphi(t)$, задаваемое формулой (2,1,11), будет х. ф. и при $1<\sigma<2$. Случай $\sigma=2$ получается применением теоремы 2.1.2 к последовательности х. ф. $\frac{1}{1+|t|^{\sigma_n}}$ при $\sigma_n<2$, $\sigma_n\to 2$ при $n\to\infty$. Предельным переходом (2,1,13) получаем новое доказательство известного факта, что $e^{-|t|^\sigma}$ при $0<\sigma\leqslant 2$ — х. ф.

Приведем еще пример довольно широкого класса х. ф. (см. [16], стр. 265—267). Пусть заданы положительные числа $\sigma_1=\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_l=\sigma_2$, причем $\sigma_1<2$, произвольные реальные числа $A_{\gamma_2}, A_{\gamma_3},\ldots, A_{\gamma_{l-1}}$ и произвольное отрицательное число $A_{\sigma_2}<0$. Тогда можно указать такую константу A_0, что при всяком $A_{\sigma_1}<-A_0$ функция

$$\varphi(t)=\exp\left(A_{\sigma_1}|t|^{\sigma_1}+\sum_{l=2}^{l-1}A_{\gamma_l}|t|^{\gamma_l}+A_{\sigma_2}|t|^{\sigma_2}\right) \qquad (2,1,14)$$

будет х. ф.

Другие примеры можно найти в работах Э. Лукача [69,71—73].

§ 2. ТЕОРЕМЫ С. БОХНЕРА, М. МАТИАСА — А. Я. ХИНЧИНА И Г. КРАМЕРА О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Теорема С. Бохнера [49, 75] устанавливает тесную связь между положительно определенными функциями и х. ф. Непрерывная комплекснозначная функция $\varphi(t)$, заданная на всей оси значений t, называется положительно определенной, если при любом целом $n > 0$, любом наборе значений реальных чисел $t_1, \ldots, t_n$ и комплексных чисел $z_1, \ldots, z_n$ имеем:

$$\sum_{j,\, n=1}^{n} \varphi(t_j - t_k)\, z_j \bar{z}_k \geqslant 0. \tag{2,2,1}$$

Легко обнаружить несколько простейших свойств положительно определенных функций:

1) $\varphi(0) \geqslant 0$.

Полагая $n = 1$, $t_1 = 0$, $\xi_1 = 1$, найдем из (2,2,1)

$$\varphi(0) \geqslant 0; \tag{2,2,2}$$

2) $\varphi(t)$ обладает эрмитовым свойством

$$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}. \tag{2,2,3}$$

Пусть в (2,2,1) $n = 2$, $t_1 = 0$, $t_2 = t$; z_1, z_2 — произвольные комплексные числа; из (2,2,1) выводим, что $\varphi(-t) z_1 \bar{z}_2 + \varphi(t) z_2 \bar{z}_1$ реально. Далее, любое комплексное число Z можно записать в виде $z_1 \bar{z}_2$; тогда $z_2 \bar{z}_1 = \bar{Z}$, так что для любого Z имеем:

$$\varphi(-t) Z + \varphi(t) \bar{Z}$$

реально. Пусть $\varphi(-t) = a + bi$; $\varphi(t) = c + di$; $Z = x + yi$, тогда $ay + bx - cy + dx = 0$. Ввиду произвольности x и y, $a - c = 0$, $b + d = 0$, что и доказывает (2,2,3);

3) при любых реальных t

$$|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0). \tag{2,2,4}$$

Полагаем $n = 2$; $z_1 = \varphi(t)$; $z_2 = -|\varphi(t)|$, тогда, согласно (2,2,1) и (2,2,3),

$$2\varphi(0)\,|\varphi(t)|^2 - |\varphi(t)|^2\,|\varphi(t)| - |\varphi(t)|^2\,|\varphi(t)| \geqslant 0.$$

Если $\varphi(t) \neq 0$, находим, что $\varphi(0) \geqslant |\varphi(t)|$. Если же $\varphi(t) = 0$, то, в силу (2,2,2), имеем то же соотношение. Если $\varphi(0) = 0$, то отсюда следует, что $\varphi(t)$ есть тождественный нуль.

Теорема 2.2.1 (С. Бохнера)

Всякая непрерывная положительно определенная функция $\varphi(t)$, для которой $\varphi(0) = 1$, есть характеристическая функция. Обратно, всякая характеристическая функция есть непрерывная положительно определенная функция.

Для доказательства первого утверждения докажем сперва простой вспомогательный факт.

При любом $Z > 0$ функция $\mathrm{X}(t)$, определяемая равенством

$$\chi_Z(t) = 1 - \frac{|t|}{Z} \text{ при } |t| \leqslant Z; \ \chi_Z(t) = 0 \ (|t| > Z),$$

будет х. ф.

Это следует непосредственно из теоремы 1.2.3 (теоремы Г. Пойа), но легко проверяется прямым вычислением соответствующей вероятностной плотности

$$f(x) = \frac{1}{\pi Z} \frac{\sin^2 \frac{Zx}{2}}{x^2}.$$

Пусть задана непрерывная положительно определенная $\varphi(t)$. Следуя Д. Дюгэ [60], рассмотрим выражение

$$f_Z(x) = \frac{1}{2\pi Z} \int_0^Z du \int_0^Z dv \varphi(u - v) e^{-iux} e^{ivx} du dv \qquad (2,2,5)$$

при заданных $Z > 0$ и x. Двойной интеграл (2,2,5) от непрерывной подынтегральной функции, рассматриваемый, как предел соответствующих Римановых сумм, должен быть неотрицательным в силу положительной определенности $\varphi(t)$.

В двойном интеграле (2,2,5) сделаем замену переменных

$$v = u - t$$
$$u = u.$$

После этого элементарные преобразования дают

$$f_Z(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-Z}^{Z} e^{-itx}\left(1 - \frac{|t|}{Z}\right) \varphi(t) dt \geqslant 0. \qquad (2,2,6)$$

Таким образом, $f_Z(x)$, записанная в виде (2,2,6), неотрицательна. Теперь применим теорему 1.3.1, заменяя в ней $\varphi(t)$ на $\frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{|t|}{Z}\right) \varphi(t)$ и x на $-x$. Мы находим, что $f_Z(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. Далее, в силу непрерывности $\left(1 - \frac{|t|}{Z}\right) \varphi(t)$ в $(-T, T)$ должны иметь в этом интервале

$$\left(1 - \frac{|t|}{Z}\right) \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) e^{itx} dx;$$

при $t = 0$ находим, что $\varphi(0) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) dx$, так что $f_Z(x)$ вероятностная плотность, а $\chi_Z(t) \varphi(t)$ — соответствующая х. ф. Далее, при $Z \to \infty$ $\mathrm{X}_Z(t) \varphi(t)$ в любом сегменте значений t

стремится к непрерывной функции $\varphi(t)$. По теореме 2.1.2 $\varphi(t)$ будет х. ф.

Второе утверждение теоремы Бохнера является почти тривиальным. Пусть $\varphi(t)$ — х. ф., так что

$$\varphi(t) = Ee^{itX}.$$

При любых реальных $t_1, \ldots, t_n$ и комплексных $z_1, \ldots, z_n$ имеем:

$$\sum_{j, k=}^{n} \varphi(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k = E \sum_{j, k=1}^{n} z_j \bar{z}_k e^{it_jX} e^{-it_kX} =$$

$$= E\left|\sum_{=1}^{n} e^{it_jX}\right|^2 \geqslant 0, \qquad (2,2,7)$$

что и доказывает утверждение.

Теорема 2.2.2 (М. Матиаса — А. Я. Хинчина) *

Для того, чтобы $\varphi(t)$ была характеристической функцией, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность функций $\{\psi_n(x)\}$, принадлежащих $L_2(-\infty, \infty)$, для которых $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1$, и

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x+t)\overline{\psi_n(x)}\, dx \qquad (2,2,8)$$

равномерно в каждом конечном сегменте значений t (см. [42]). Заметим, что для $\psi_n(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ интегралы (2,2,8) абсолютно сходятся и являются непрерывными функциями t. В самом деле, полагая

$$\varphi_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x+t)\overline{\psi_n(x)}\, dx, \qquad (2,2,9)$$

имеем:

$$|\varphi_n(t+h) - \varphi_n(t)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(t+h+x) - \psi_n(t+x)|\,|\overline{\psi_n(x)}|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(t+h+x) - \psi_n(t+x)|^2 dx\right)^{1/2} \qquad (2,2,10)$$

в силу известного неравенства Коши-Буняковского и того, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1$. При $h \to 0$ правая часть (2,2,10) стре-

---

* См. также [75].

мится к 0 в силу свойств функций, принадлежащих $L_2(-\infty\ \infty)$, (см., например, Е. С. Тичмарш [37], гл. 12, стр. 443).

Докажем сперва достаточность условия (2,2,8). Для этого покажем сначала, что каждая из функций (2,2,9) есть х. ф.

Согласно вышесказанному, $\varphi_n(t)$ непрерывна, $\varphi_n(0)=1$. Далее, применим теорему Бохнера. Пусть $t_1, \ldots, t_m$ — любой набор реальных чисел; $z_1, \ldots, z_m$ — любой набор комплексных чисел.

Тогда из (2,2,9) находим

$$\sum \varphi_n(t_j-t_k)\, z_j\bar{z}_k = \sum_{j,k=1}^{m} z_j\bar{z}_k \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x+t_j-t_k)\,\bar{\psi}_n(x)\,dx =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{m} z_j\bar{z}_k \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(u+t_j)\,\bar{\psi}_n(u+t_k)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{m} z_j \psi(u+t_j) \right|^2 du \geqslant 0. \qquad (2,2,11)$$

Таким образом, $\varphi_n(t)$ — х. ф. Так как $\varphi_n(t)$ сходится к $\varphi(t)$ равномерно на каждом конечном сегменте, то $\varphi(t)$ непрерывна, и, следовательно, по теореме 2.1.2 $\varphi(t)$ — х. ф.

Перейдем к необходимости условия (2,2,8). Пусть $\varphi(t)$ х. ф. и $F(x)$ соответствующий з. р. При всяком целом $n>0$ разобьем сегмент $[-n, n]$ на n^2 равных сегментов длины $\frac{2}{n}$ и определим новый з. р. $F_n(x)$ условиями: $F_n(-n)=0$, $F_n(n)=1$, во всех других абсциссах деления $F_n(x)=F(x)$ и внутри каждого промежутка деления $F_n(x)$ имеет линейный график, соединяющий найденные точки. Соответствующую х. ф. назовем $\varphi_n(t)$. При $n\to\infty$, очевидно, $F_n(x)$ слабо сходится к $F(x)$, и $\varphi_n(t)\to\varphi(t)$ равномерно в каждом конечном сегменте значений t. Положим далее $L_n=\int_{-n}^{n}\sqrt{F_n'(x)}\,dx$. Тогда $\frac{1}{L_n}\sqrt{F_n'(x)}\geqslant 0$ вероятностная плотность, и соответствующая х. ф. будет

$$X_n(t)=\int_{-n}^{n}\frac{1}{L_n}\sqrt{F_n'(x)}\,e^{itx}\,dx.$$

Далее, очевидно, $\sqrt{F_n'(x)}\in L_2(-\infty, \infty)$, а также и $X_n(t)\in L_2(-\infty, \infty)$. По формуле свертки (1,3,6) произведению $\frac{1}{L_n}\sqrt{F_n'(x)}\,\frac{1}{L_n}\sqrt{F_n'(x)}=\frac{F_n'(x)}{L_n^2}$ отвечает в качестве преобразования Фурье свертка

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{X}_n(t-u)\,\mathrm{X}_n(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_n(t-u)\,\overline{\chi_n(-u)}\,du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{X}_n(t+x)\,\overline{\chi_n(x)}\,dx.$$

Итак,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_n(t+x)\,\overline{\chi_n(x)}\,dx = \frac{2\pi}{L_n^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}F_n'(x)\,dx =$$

$$= \frac{2\pi}{L_n^2}\int_{-n}^{n} e^{itx}\,dF_n(x) = \frac{2\pi}{L_n^2}\varphi_n(t).$$

Полагая $\psi_n(t) = \frac{L_n}{\sqrt{2\pi}}\psi_n(t)$, приходим к требуемому результату.

Переходим к теореме Г. Крамера [52].

Теорема 2.2.3 (Г. Крамер)

Пусть $m(x)$ — вероятностная плотность и $\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}m(x)\,dx$ — х. ф. Пусть $\mu(t) \in L_1(-\infty, \infty)$. Для того, чтобы ограниченная и интегрируемая по Лебегу в каждом конечном сегменте комплекснозначная функция $f(t)$ была х. ф., необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ функция

$$f(t)\,\mu(\varepsilon t) \tag{2,2,12}$$

была х. ф.

Доказательство см. в [52]. Отметим отдельные примеры $\mu(t)$: $\mu(t) = e^{-t^2/2}$; $\mu(t) = e^{-|t|}$; $\mu(t) = 1 - |t|$ $(|t| \leqslant 1)$; $\mu(t) = 0$ $(|t| > 1)$.

§ 3. ФУНКЦИОНАЛ А. Я. ХИНЧИНА

В работе [43] 1937 г. А. Я. Хинчин вводит весьма интересный функционал, связанный с характеристическими функциями, и дает его применение к разложениям вероятностных законов.

Пусть $f(t)$ — х. ф., не обращающаяся в 0 в сегменте $[0, a]$. Функционал А. Я. Хинчина определяется, как

$$N_a(f) = -\int_0^a \ln|f(t)|\,dt \tag{2,3,1}$$

(разумеется, интеграл сходится, ибо $f(t)$ непрерывна и $\neq 0$ в сегменте $[0, a]$).

Связь функционала А. Я. Хинчина (2,3,1) с разложениями вероятностных законов ясна. Пусть з. р. $F=F_1 * F_2$; $\varphi(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ — равенство между соответствующими х. ф. Если $\varphi(t)\neq 0$ в сегменте $[0, a]$, то же касается φ_1 и φ_2, и

$$N_a(\varphi)=N_a(\varphi_1)+N_a(\varphi_2). \tag{2,3,2}$$

Пусть теперь $\{\varphi_n(t)\}$ последовательность х. ф., не обращающихся в 0 в сегменте $[0, a]$; пусть соответствующие з. р. $F_n(x)$ имеют на сегменте длины ε концентрацию $Q_n(\varepsilon)$. Имеет место теорема.

Теорема 2.3.1

Пусть при заданном $a>0$ *имеем*:

$$\lim_{n\to\infty} N_a(\varphi_n)=0. \tag{2,3,3}$$

Тогда при любом $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(\varepsilon)=1. \tag{2,3,4}$$

Докажем сперва лемму.

Лемма

Пусть $f(t)$ — *х. ф. симметрического закона, тогда*

$$1-f(2t)\leqslant 4(1-f(t)). \tag{2,3,5}$$

Для доказательства замечаем, что $f(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos tx dF(x)$,

где $F(x)$ — соответствующий з. р., имеем:

$$1-f(2t)=\int\limits_{-a}^{\infty}(1-\cos 2tx)\,dF(x)=2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin^2 tx dF(x)=$$

$$=2\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+\cos tx)\times(1-\cos tx)\,dF(x)\leqslant 4\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dF(x)=$$

$$=4(1-f(t)).$$

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим выражение

$$\int\limits_0^a (1-|\varphi_n(t)|^2)\,dt. \tag{2,3,6}$$

Так как $0\leqslant 1-|\varphi_n(t)|^2=(1+|\varphi_n(t)|)(1-|\varphi_n(t)|)\leqslant \leqslant 2(1-|\varphi_n(t)|)$, имеем:

$$\int\limits_0^a (1-|\varphi_n(t)|^2)\,dt\leqslant 2\int\limits_0^a (1-|\varphi_n(t)|)\,dt. \tag{2,3,7}$$

Последнее выражение не превосходит $2N_a(\varphi_n)$. В самом деле, имеем $|\varphi_n(t)|>0$ при $t\in[0, a]$ и $-\ln|\varphi_n(t)|= =-\ln(1-(1-|\varphi_n(t)|))=(1-|\varphi_n(t)|)+\frac{(1-|\varphi_n(t)|)^2}{2}+\ldots$, откуда $-\ln|\varphi_n(t)|>1-|\varphi_n(t)|$. Таким образом,

$$\int_0^a(1-|\varphi_n(t)|^2)\,dt\leqslant 2N_a(\varphi_n)\to 0 \quad \text{при } n\to\infty. \qquad (2,3,8)$$

Покажем, что также

$$\int_0^{2a}(1-|\varphi_n(t)|^2)\,dt\to 0 \quad \text{при } n\to\infty. \qquad (2,3,9)$$

В самом деле, по нашей лемме (2,3,5)

$$\int_0^{2a}(1-|\varphi_n(t)|^2)\,dt=2\int_0^a(1-|\varphi_n(2u)|^2)\,du\leqslant$$

$$\leqslant 8\int_0^a(1-|\varphi_n(u)|^2)\,du\to 0$$

при $n\to\infty$. Продолжая такое удвоение аргумента, покажем, что $\int_0^{4a}(1-|\varphi_n(t)|^2)\,dt\to 0$ при $n\to\infty$, и вообще

$$\int_0^{2^k a}(1-|\varphi_n(t)|^2)\,dt\to 0$$

при $n\to\infty$. Так как $1-|\varphi_n(t)|^2\geqslant 0$ для всех t, то имеем:

$$\int_0^T(1-|\varphi_n(t)|^2\,dt\to 0 \quad \text{при } n\to\infty \qquad (2,3,10)$$

для любого $T>0$.

Мы видим, что х. ф. $|\varphi_n(t)|^2$ близка к 1 „в среднем квадратичном“ (в смысле 2,3,10). Мы хотим вывести отсюда (2,3,4). Сперва будем доказывать, что если $\Phi_n(x)$ з. р. для $|\varphi_n(t)|^2$, то

$$\Phi_n(x)\to\varepsilon(x) \qquad (2,3,11)$$

(как обычно, в смысле слабой сходимости).

Возьмем вспомогательный нормальный закон $G_\delta(x)\in N(0,\delta)$ с х. ф. $\exp\left(-\frac{\delta^2t^2}{2}\right)$, пусть $\Psi_n(x)=\Phi_n(x)*G_\delta(x)$, так что $\Psi_n(x)$ имеет х. ф. $e^{-\frac{\delta^2t^2}{2}}|\varphi_n(t)|^2$. Далее, $\psi_n(x)$ — симметрический закон; $\psi_n(0)=\frac{1}{2}$. Применим формулу обращения (0,2,5), где положим $\xi=0$, $h=x$, найдем

$$\psi_n(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin tx}{t}|\varphi_n(t)|^2 e^{-\frac{\delta^2 t^2}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin tx}{t} e^{-\frac{\delta^2 t^2}{2}}dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin tx}{t}(|\varphi_n(t)|^2 - 1) e^{-\frac{\delta^2 t^2}{2}}dt =$$

$$= G_\delta(x) - \frac{1}{2} + I_{n,\delta}(x), \qquad (2,3,12)$$

где

$$I_{n,\delta}(x) = \frac{1}{\pi}\int^\infty \frac{\sin tx}{t}(|\varphi_n(t)|^2 - 1) e^{-\frac{\delta^2 t^2}{2}}dt. \qquad (2,3,13)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. При данном δ выбираем $T_0 = T_0(\delta, \varepsilon)$ так, что

$$\int_{T_0}^\infty e^{-\frac{\delta^2 t^2}{2}}dt < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (2,3,14)$$

и замечаем далее, что в силу (2,3,10), при $n > n_0(\delta, \varepsilon, x)$

$$\left|\int_0^{T_0} \frac{\sin tx}{t}(|\varphi_n(t)|^2 - 1) e^{-\frac{\delta^2 t^2}{2}}dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant |x| \int_0^T (1 - |\varphi_n(t)|^2)dt < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2,3,15)$$

Таким образом, в силу (2,3,12) при заданном ε и $n \to \infty$

$$\psi_n(x) \to G_\delta(x) \qquad (2,3,16)$$

равномерно в каждом конечном сегменте значений x и при заданном δ. Отсюда явствует, что

$$\psi_n(x) \to \mathfrak{E}(x). \qquad (2,3,17)$$

Стало быть, концентрация $\psi_n(x)$ для любого сегмента длины $\varepsilon_0 > 0$ стремится к 1. Согласно лемме П. Леви из § 2 введения (см. (0,2,4)) концентрация компонент $\psi_n(x)$ не меньше концентрации $\psi_n(x)$; так как $\psi_n(x) = F_n(x) * (1 - F_n(-x))$, то концентрация $F_n(x)$ в каждом сегменте длины $\varepsilon_0 > 0$ стремится к 1, чем теорема 2.3.1 и доказана.

Глава третья

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, АНАЛИТИЧЕСКИЕ В ПОЛОСЕ

§ 1. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ МОМЕНТОВ И УСЛОВИЯ АНАЛИТИЧНОСТИ

Из выражения х. ф.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \tag{3,1,1}$$

легко усмотреть, что $\varphi(t)$ непрерывна и притом равномерна на всей оси значений t. Если для какого-либо целого $m > 0$ существует абсолютный m-й момент $\rho_m = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^m dF(x)$, то из (3,1,1) видим, что

$$\varphi^{(m)}(t) = i^m \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} x^m dF(x) \tag{3,1,2}$$

и что $\varphi^{(m)}(t)$ непрерывна на всей оси, в частности,

$$\varphi^{(m)}(0) = i^m \alpha_m, \tag{3,1,3}$$

где $\alpha_m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m dF(x)$ — m-й момент для з. р. $F(x)$.

Заметим, что из (3,1,2) также видно, что для четных m при условии существования α_m функция $i^{-m}\varphi^{(m)}(t)$ будет положительно определенной, а функция $\frac{i^{-m}}{\alpha_m}\varphi^{(m)}(t)$ будет х. ф.

Таким образом, существование моментов влечет существование соответствующего количества производных $\varphi(t)$. Имеют место и обратные теоремы различного вида. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.1.1

Пусть у характеристической функции $\varphi(t)$ *существует* $2r$-я производная в нуле $\varphi^{(2r)}(0)$ ($2r$ — четное число). Тогда существует и $2r$-й момент α_{2r} и $2r$-я производная на всей оси t существует и равна

$$\varphi^{(2r)}(t)=(-1)^r\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}x^{2r}dF(x). \qquad (3,1,4)$$

На основании сказанного выше достаточно доказать лишь существование момента α_{2r}. Возьмем сперва значение $2r=2$. Ввиду существования $\varphi''(0)$ должны иметь:

$$\varphi''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)+\varphi(-h)-2\varphi(0)}{h^2}. \qquad (3,1,5)$$

Далее, согласно (3,1,1),

$$-\frac{\varphi(h)+\varphi(-h)-2\varphi(0)}{h^2}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{4\sin^2\frac{xh}{2}}{h^2}dF(x). \qquad (3,1,6)$$

Далее, при $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ имеем: $\sin t\geqslant\frac{2}{\pi}t$. Таким образом, при $|x|\leqslant\frac{\pi}{h}$ $\sin^2\frac{xh}{2}\geqslant\frac{4}{\pi^2}\frac{x^2h^2}{4}=\frac{x^2h^2}{\pi^2}$.

Из (3,1,6) находим

$$-\frac{\varphi(h)+\varphi(-h)-2\varphi(0)}{h^2}\geqslant\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}}x^2dF(x). \qquad (3,1,7)$$

При $h\to 0$ величина слева приближается к $\varphi''(0)$, стало быть, остается ограниченной, величина $\frac{\pi}{h}\to\infty$. Это и доказывает существование α_2, а из существования α_2 выводим, что

$$\varphi''(t)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{itx}x^2dF(x). \qquad (3,1,8)$$

Пусть $2r=4$, так что существует $\varphi^{(4)}(0)$.

Тогда имеет место (3,1,8). Согласно сказанному выше, $-\frac{\varphi''(t)}{\alpha_2}=\varphi_2(t)$ будет х. ф. Она будет иметь $\varphi_2''(0)$, откуда следует, что существует α_4 и $\varphi_2''(t)$, а следовательно, и $\varphi^{(4)}(t)$, представляемая формулой (3,1,2) при $m=4$.

При этом $\frac{\varphi^{(4)}(t)}{\alpha_4}$ будет х. ф. Продолжая эти рассуждения, очевидно, докажем нашу теорему для любого четного $2r$.

Если существует β_m, то на основании неравенств (0,2,2) существует и β_n с $n<m$. В этом случае $\varphi^{(m)}(t)$ существует и непрерывна на всей оси. Мы будем иметь разложение

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = 1 + \frac{i\alpha_1}{1!} + \frac{i^2\alpha_2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{i^{m-1}\alpha_{m-1} t^{m-1}}{(m-1)!} + $$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta tx} x^m dF(x); \; 0 \leqslant \theta \leqslant 0. \qquad (3,1,9)$$

Другая форма ряда Маклорена (см. [9], стр. 38) дает разложение при малых t

$$\varphi(t) = 1 + \frac{i\alpha_1}{1!} + \ldots + \frac{i^m \alpha_m t^m}{m!} + o(t^m). \qquad (3,1,10)$$

Заметим, что четные коэффициенты в (3,1,10) должны иметь знак $(-1)^{\frac{m}{2}}$, где m — номер коэффициента. В частности, второй коэффициент не положителен, он может обратиться в 0, очевидно, только для несобственного з. р. $\mathfrak{E}(x)$ [см. (0,1,1,)]. с х. ф. $\varphi(t) \equiv 1$. Это замечание позволяет иногда сразу заметить, что данная функция t не может быть х. ф. Например, $\varphi(t) = e^{-t^4}$, и вообще $\varphi(t) = e^{-|t|^\sigma}$ при $\sigma > 2$, $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^4}$ не могут быть х. ф.

Перейдем теперь к условиям аналитичности $\varphi(t)$.

Мы будем называть $\varphi(t)$ аналитической х. ф. в некотором круге $|t| < R$, если существует регулярная в этом круге функция комплексного переменного t, совпадающая с $\varphi(t)$ для реальных значений t.

Теорема 3.1.2 (Д. А. Райкова)

Для того, чтобы характеристическая функция $\varphi(t)$ была регулярной в круге $|t| < R$, необходимо и достаточно, чтобы для соответствующего з. р. $F(x)$ выполнялись соотношения

$$\left.\begin{aligned} 1 - F(x) &= O(e^{-rx})\,(x \to \infty); \\ F(-x) &= O(e^{-rx})\,(x \to \infty) \end{aligned}\right\} \qquad (3,1,11)$$

при любом $r < R$.

При этих условиях $\varphi(t)$ будет регулярна в полосе $|I(t)| < R$.

Докажем сперва необходимость соотношений (3,1,11). Пусть $\varphi(t)$ регулярна в круге $|t| < R$; в этом круге имеем:

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu. \qquad (3,1,12)$$

При этом, как известно (см. гл. 1),

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \frac{1}{R}. \qquad (3,1,13)$$

Отсюда следует, что при сколь угодно малом заданном $\varepsilon > 0$ и $n > n_0(\varepsilon)$

$$|a_n| < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n. \qquad (3,1,14)$$

Далее, $\varphi(t)$ согласно (3,1,12), имеет все производные, и, стало быть, по теореме 3.1.1 существуют все моменты з. р. и имеем [см. (3,1,10)]:

$$a_\nu = \frac{i^\nu \alpha_\nu}{\nu!}. \qquad (3,1,15)$$

Таким образом, для четных $\nu = 2r$ при $r > r_0$

$$\frac{\alpha_{2r}}{(2r)!} = \frac{1}{(2r)!}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2r} dF(x) < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^{2r}. \qquad (3,1,16)$$

Согласно неравенствам (0,2,2), имеем:

$$\beta_{2r-1} \leqslant (\alpha_{2r})^{\frac{2r-1}{2r}} < (2r!)^{\frac{2r-1}{2r}}\left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^{2r-1}. \qquad (3,1,17)$$

Воспользуемся теперь известной формулой Стирлинга $m! \sim m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m}$. Согласно этой формуле

$$\frac{(2r!)^{\frac{2r-1}{2r}}}{(2r-1)!} = \frac{2r}{(2r!)^{\frac{1}{2r}}} < K\frac{2r}{2re^{-1}\,(2\pi r)^{\frac{1}{2r}}} < K_1, \qquad (3,1,18)$$

где K, K_1 положительные константы. Таким образом,

$$\beta_{2r-1} < K_1(2r-1)!\left(\frac{1}{K} + \varepsilon\right)^{2r-1}, \qquad (3,1,19)$$

откуда непосредственно выводим, что при r — таких, что

$$r\left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right) < 1,$$

ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\beta_m = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{r^m}{m!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^m dF(x) \qquad (3,1,20)$$

сходится. Это означает, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{r|x|} dF(x) < \infty. \qquad (3,1,21)$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то (3,1,21) имеет место для всех $r < R$. Полагая $t = \xi + i\eta$, $\xi = \operatorname{Re} t$, $\eta = It$, видим, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(\xi + i\eta)ix} dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(\xi i - \eta)x} dF(x) \qquad (3,1,22)$$

абсолютно сходится при $|\eta| < R$ и представляет собой функцию $t = \xi + i\eta$, регулярную в полосе $|\eta| < R$.

При $\eta = 0$ он совпадает с $\varphi(\xi)$, при $|t| < R$ — совпадает с рядом (3,1,12). Итак, если $\varphi(t)$ регулярна в круге $|t| < R$, то она регулярна и в полосе $|It| < R$ и представляется интегралом (3,1,22) в этой полосе.

Теперь нетрудно доказать соотношения (3,1,11). Докажем первое из них, исходя из (3,1,21). Из (3,1,21) находим при $x > 1$

$$1 - F(x) = \int_x^\infty dF(u) \leqslant e^{-rx} \int_x^\infty e^{ru} dF(u) = O(e^{-rx})$$

и аналогично доказываем вторую из оценок (3,1,11).

Достаточность условий (3,1,11) почти тривиальна. Из этих условий находим при $0 < r < R$, $r_1 < r$.

$$\int_0^\infty e^{r_1 x} dF(x) = e^{r_1 x} F(x) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty r_1 e^{r_1 x} F(x) dx =$$

$$= O(1) - r_1 \int_0^\infty O(e^{(r_1 - r)x}) dx = O(1).$$

Аналогичным образом обнаруживаем, что $\int_{-\infty}^0 e^{r_1 |x|} dF(x) = O(1)$.

Таким образом, при любом $r_1 < R$ интеграл $\int_{-\infty}^\infty e^{r_1 |x|} dF(x)$ сходится. При $t = \xi + i\eta$; $|\eta| < R$ абсолютно сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty e^{(\xi + i\eta) ix} dF(x), \qquad (3,1,23)$$

который при $\eta = 0$ совпадает с $\varphi(\xi)$. Этим доказано требуемое.

Заметим, что х. ф. $\varphi(t)$ может быть продолжима в различные области, не содержащие полосы $|It| < \eta_0$, и непродолжима в такую полосу. Например, х. ф. вида

$$\varphi_1(t) = e^{-|t|}; \quad \varphi_2(t) = 2e^{-|t|} - e^{-2|t|}, \qquad (3,1,24)$$

которым отвечают плотности вероятности, являющиеся рациональными функциями, будут продолжимы в полуплоскости $\xi \geqslant 0$ и $\xi \leqslant 0$; как целые функции, но разные для двух указанных полуплоскостей. При $t \geqslant 0$ это будут функции (соответственно) e^{-t}; $2e^{-t} - e^{-2t}$, при $t < 0$ — функции e^t; $2e^t - e^{2t}$. Такое же явление будет наблюдаться для х. ф., отвечающих любым рациональным плотностям вероятности $p(\alpha)$, такие х. ф. будут продолжаться в полуплоскости $\xi \geqslant 0$ и $\xi \leqslant 0$ как две различные целые функции.

Такая продолжимость уже не должна приводить к оценкам вида (3,1,11). У функции $\varphi_1(t)$ (см. 3,1,24) отсутствует даже первый момент, а у функции $\varphi_2(t)$ нет абсолютного третьего момента. При этом $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют любое число производных справа или слева при $t=0$ и обычных производных в любой точке $t\neq 0$.

§ 2 СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛОСЕ. ХРЕБТОВЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть $\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF(x)$ регулярна в полосе $|It|<R$ $(t=\xi+i\eta)$. Случай $R=\infty$ также допускается; он отвечает целой х. ф.

Легко заметить одно важное свойство таких функций.

Теорема 3.2.1

При $t=\xi+i\eta$, максимум $|\varphi(t)|$ на всякой горизонтали, проходящей в полосе, достигается в точках пересечения горизонтали с осью $\xi=0$, т. е.

$$|\varphi(\xi+i\eta)|\leqslant\varphi(i\eta). \tag{3,2,1}$$

Доказательство этой теоремы весьма просто:

$$|\varphi(t)|=\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp i(\xi+i\eta)x\,dF(x)\right|\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\eta x)\,dF(x)=$$
$$=\varphi(i\eta). \tag{3,2,2}$$

Заметим, что из (3,2,2) следует также, что $\varphi(t)$ не имеет нулей при $t=i\eta$; $|\eta|<R$.

Для целых х. ф. нетрудно доказать теорему.

Теорема 3.2.2

Если характеристическая функция $\varphi(t)$ целая, то либо $\varphi(t)\equiv 1$, либо порядок $\varphi(t)$, как целой функции, не меньше 1.

В самом деле, $\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF(x)$, и интеграл абсолютно сходится для всех t. Если $F(x)$ имеет единственную точку роста $x=0$, то $F(x)=\mathfrak{E}(x)$ (см. введение) и $\varphi(t)\equiv 1$. Если же это не так, то есть точка роста $x_0\neq 0$. Положим $t=-i\eta\operatorname{sgn}x_0$, тогда

$$\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\eta\operatorname{sgn}x_0\cdot x}dF(x)\geqslant\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{\eta(\operatorname{sgn}x_0)x}dF(x)=\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{|\eta x|}dF(x)$$

при достаточно малом ε. Последний интеграл не меньше $\varepsilon_1 \exp(|\eta|(|x_0|-\varepsilon))$, где $\varepsilon_1=\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dF(x)$. Таким образом, имеем (см. § 8, гл. 1):

$$M(r) \geqslant \varepsilon_1 e^{c_0 r}, \tag{3,2,3}$$

где $c_0>0$ — константа. Это и доказывает требуемое.

Как мы уже замечали, $\varphi(i\eta \neq 0)$ внутри полосы регулярности, — стало быть, $\ln \varphi(t)$ есть функция регулярная в области, содержащей отрезок мнимой оси $|\eta|<R$ (будем говорить для определенности о ветви $\ln \varphi(t)$ такой, что $\ln \varphi(0)=0$).

Теорема 3.2.3 (Д. Дюгэ)

Для характеристической функции $\varphi(t)$, регулярной в полосе $|\eta|<R$, $\ln \varphi(i\eta)$ есть выпуклая функция.

Полагая $\ln \varphi(t)=g(t)$ в указанной выше области, содержащей отрезок мнимой оси, имеем в указанной области

$$\varphi(t)=\exp g(t)=\exp(A(\xi, \eta)+iB(\xi, \eta)), \tag{3,2,4}$$

где $A(\xi, \eta)=\operatorname{Re} g(t)$; $B(\xi, \eta)=Ig(t)$. Отсюда.

$$|\varphi(t)|=\exp A(\xi, \eta). \tag{3,2,5}$$

Согласно (3,2,1), при любом значении $\xi \in (-\infty, \infty)$

$$\exp A(\xi, \eta) \leqslant \exp A(0, \eta). \tag{3,2,6}$$

Значит, при каждом заданном η ($|\eta|<R$) $A(\xi, \eta)$ достигает максимума при $\xi=0$. Как известно, $A(\xi, \eta)$ — гармоническая функция в указанной области, стало быть, дважды дифференцируемая по ξ и по η. Ввиду этого (3,2,5) дает

$$\left.\frac{\partial A(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}=0; \left.\frac{\partial^2 A(\xi, \eta)}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=0} \leqslant 0. \tag{3,2,7}$$

Так как $A(\xi, \eta)$ гармоническая функция, то

$$\frac{\partial^2 A(\xi, \eta)}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 A(\xi, \eta)}{\partial \eta^2}=0. \tag{3,2,8}$$

Вместе с (3,2,7) это дает

$$\left.\frac{\partial^2 A(\xi, \eta)}{\partial \eta^2}\right|_{\xi=0}=\frac{d^2 A(0, \eta)}{d\eta^2} \geqslant 0, \tag{3,2,9}$$

т. е. $A(0, \eta)=\ln|\varphi(i\eta)|=\ln \varphi(i\eta)$ выпуклая функция (см. § 1, гл. 1).

Свойство (3,2,1) играет важную роль в теории аналитических х. ф., однако оно не может полностью характеризовать х. ф., как мы увидим далее.

Пусть в полосе $|\eta| < R$ задана регулярная функция $f(t)$, неотрицательная при $t = i\eta$ и такая, что

$$|f(\xi + i\eta)| \leqslant f(i\eta). \tag{3,2,10}$$

Поверхность $|f(\xi + i\eta)|$ над нашей полосой образует ландшафт, где отрезок мнимой оси $|\eta| < R$ играет роль горного хребта (водораздела). Поэтому будем называть такую функцию *хребтовой функцией*.

Всякая х. ф. есть хребтовая функция, однако обратное неверно (помимо тривиальных примеров, когда $f(0) \neq 1$). Нетривиальный пример можно построить с помощью функции

$$f_1(t) \exp\left(-\gamma t^2 + (e^{it} - 1) + \left(e^{\frac{p}{q}it} - 1\right) - \nu\left(e^{\frac{it}{q}} - 1\right)\right), \tag{3,2,11}$$

где $\gamma > 0$, p, q — целые числа, $\nu > 0$ достаточно мало, $1 < p < q$. В § 2 гл. 8 будет доказано, что $f_1(t)$ — х. ф. Однако, как будет обнаружено в § 1 гл. 6, $f_1(t)$ не будет х. ф. б. д. з., т. е. не может быть представлена в виде (0,2,8). Отсюда следует, что существует $\alpha > 0$ такое, что функция

$$f_\alpha(t) = (f_1(t))^\alpha = \exp \alpha\left(-\gamma t^2 + (e^{it} - 1) + \right.$$
$$\left. + \left(e^{\frac{p}{q}it} - 1\right) - \nu\left(e^{\frac{it}{q}} - 1\right)\right) \tag{3,2,12}$$

не будет х. ф. Вместе с тем эта функция будет явно хребтовой, так как при определении $(f(t))^\alpha$ формулой (3,2,12) имеем:

$$|f_\alpha(t)| = |f_1(t)|^\alpha. \tag{3,2,13}$$

Ввиду того, что $f_1(t)$ — х. ф., имеем: $|f_1(\xi + i\eta)| \leqslant |f_1(\xi)|$, и из (3,2,13) получаем, что $f_\alpha(t)$ — хребтовая функция.

Другой пример см. в § 6 гл. 5.

Хребтовые функции, во многом сходны с х. ф. Произведение хребтовых функций, регулярных в заданной полосе, всегда является хребтовой функцией. Они образуют выпуклое множество. Если хребтовая функция $f(t)$ не имеет нулей внутри полосы регулярности, и при $\alpha > 0$ степень $(f(t))^\alpha$ определена так, что $(f(i\eta))^\alpha$ положительно, то $(f(t))^\alpha$ будет хребтовой функцией. В частности, если $\varphi(t)$ х. ф. регулярна в некоторой полосе и не имеет там нулей, то $(\varphi(t))^\alpha$ — хребтовая функция при любом $\alpha > 0$.

Хребтовые функции, вероятно, впервые рассматривались Д. Дюгэ [56], в указанной работе дано несколько теорем о них.

§ 3. ТЕОРЕМА И. МАРЦИНКЕВИЧА

В 1938 г. И. Марцинкевич [74] доказал интересную теорему о х. ф., имеющую несколько любопытных применений.

Теорема 3.3.1 (И. Марцинкевич)

Не существует целых характеристических функций, которые имели бы порядок $\rho > 2$ и показатель сходимости множества нулей $\rho_1 < \rho$ $(\rho < \infty)$.

(По поводу терминологии см. гл. 1, § 8).

Пусть $\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x, -$ целая х. ф. с указанными в формулировке свойствами. Так как $\varphi(0) = 1$, то $t = 0$ не есть нуль $\varphi(t)$. Ввиду этого разложение этой функции с помощью ее канонического произведения $\Pi(z)$ по теореме Ж. Гадамара (теорема 1.8.2) имеет вид

$$\varphi(t) = e^{Q(t)} \Pi(t). \tag{3,3,1}$$

Здесь $Q(t)$ полином степени $q \leqslant \rho$. Согласно теореме 1.8.1 каноническое произведение $\Pi(t)$ есть целая функция порядка $\rho_1 < \rho$. Ввиду этого должно быть $q = \rho$.

В самом деле, если $q < \rho$, то $e^{Q(t)}$ — целая функция порядка $\rho_1 < \rho$ и так как $\Pi(t)$ — целая функция порядка $\rho_1 < \rho$, то их произведение $\varphi(t)$ имело бы порядок меньше ρ, что противоречит условию. Итак, $\rho = q$ — целое число, и так как $\rho > 2$, то $\rho = q \geqslant 3$.

Согласно (1,8,7), для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $R_n \to \infty$ таких, что

$$\operatorname*{Inf}_{|z| - D_n} |\Pi(t)| \geqslant \exp(-R_n^{\rho_1 + \varepsilon}). \tag{3,3,2}$$

Положим $t = \xi + i\eta$; $Q(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_q t^q$; $a_q = re^{i\theta} \neq 0$; $t = t_{ns} = R_n \exp\left(\frac{2\pi s - \theta}{q} i\right)(s = 0, 1, \ldots, q - 1)$. При достаточно большом R_n имеем:

$$Q(t_{ns}) = a_q t_{ns}^q + O(R_n^{q-1}) = rR_n^q + O(R_n^{q-1}) > (r - \varepsilon) R_n^q, \tag{3,3,3}$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное заданное число. В силу (3,3,2), имеем:

$$|\varphi(t_{ns})| > \exp((r - \varepsilon) R_n^q - R_n^{\rho_1 + \varepsilon}) > \exp((r - 2\varepsilon) R_n^q) \tag{3,3,4}$$

при достаточно малом ε.

Однако, согласно (3,1,1), мы должны иметь:

$$|\varphi(t_{ns})| \leqslant \varphi\left(iR_n \sin \frac{2\pi s - \theta}{q}\right). \tag{3,3,5}$$

Положим $R_n \sin \frac{2\pi s - \theta}{q} = Iz_{ns} = \eta_{ns}$. В силу (3,3,1) и того, что $\Pi(t)$ имеет порядок $\rho_1 < q$, получим при достаточно большом R_n

$$|\varphi(i\eta_{ns})| \leqslant \exp(r + \varepsilon) |\eta_{ns}|^q. \tag{3,3,6}$$

Тогда, согласно (3,3,4) и (3,3,5), получим

$$(r+\varepsilon)\,|\eta_{ns}|^q \geqslant (r-2\varepsilon)\,R_n^q\ (s=0,1,\ldots,\ q-1). \qquad (3,3,7)$$

Так как $q \geqslant 3$, то среди чисел $\frac{2\pi s-\theta}{q}$ найдется хотя бы одно, не сравнимое с $\pm\frac{\pi}{2}$ по модулю 2π. В самом деле, этих чисел не менее трех, и соседние из них различаются на $\frac{2\pi}{q}$ по модулю 2π, деля окружность на q равных частей.

Пусть s_0 такое, для которого $\frac{2\pi s_0-\theta}{q}$ несравнимо с $\pm\frac{\pi}{2}$ по модулю 2π. Тогда

$$\left|\sin\frac{2\pi s_0-\theta}{q}\right| = \gamma < 1;\ |\eta_{ns_0}| = \gamma R_n. \qquad (3,3,8)$$

Если $\varepsilon > 0$ было выбрано заранее достаточно малым, сравнительно с $1-\gamma$, то (3,3,7) приводит к противоречию, доказывающему теорему 3.3.1.

Отметим важное следствие теоремы 3.3.1, которое, в основном, и находит себе применение.

Следствие теоремы 3.3.1

Если характеристическая функция $\varphi(t)$ имеет вид $e^{P(t)}$, где $P(t)$ полином, то это квадратный полином, и $\varphi(t)$ — х. ф. нормального закона.

В данном случае $\varphi(t)$ — целая функция, не имеющая нулей. Если бы $P(t)$ был степени $q \geqslant 3$, то, в силу теоремы 3.3.1, $\varphi(t)$ не могла бы быть х. ф. Значит, $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Так как $\varphi(0)=0$, то $a_0 = 0$; далее, $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$, так что должно быть $P(-t) = \overline{P(t)}$, т. е. $-a_1 t + a_2 t^2 = \bar{a}_1 t + \bar{a}_2 t^2$, откуда $\bar{a}_1 = -a_1$, $\bar{a}_2 = a_2$, т. е. $a_1 = \alpha_i$ чисто мнимо, а a_2 реально. Очевидно, $a_2 \leqslant 0$, чем все и доказано.

Заметим, что доказательство этого следствия теоремы 3.3.1 может быть проведено значительно проще, чем доказательство теоремы 3.3.1. В (3,3,1) полагаем $\Pi(t) \equiv 1$, в теории целых функций при этом вообще не нуждаемся; противоречие (3,3,7) выходит гораздо проще.

Заметим еще, что теорема 3.3.1 верна также и для хребтовых функций $f(t)$ при условии $f(0) \neq 0$. В самом деле, при доказательстве теоремы 3.3.1 мы использовали только это неравенство и то, что $f(t)$ — хребтовая функция.

В дальнейшем мы получим некоторое усиление следствия теоремы 3.3.1.

§ 4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛОСЕ

Рассмотрим х. ф. $\varphi(t)$ безгранично делимого закона. Для реальных t она задается формулой (0,2,8):

$$\varphi(t)=\exp\left(\beta it-\gamma t^2+\int_{-\infty}^{0}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dM(u)+\right.$$
$$\left.+\int_{0}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dN(u)\right), \qquad (3,4,1)$$

где $M(u)$ и $N(u)$ — неубывающие функции; $M(-\infty)=$ $=N(\infty)=0;\int_{-a}^{0}u'dM(u)<\infty;\ \int_{0}^{a}u^2dN(u)<\infty$, при любом $a>0$.

Пусть теперь $\varphi(t)$ регулярна в полосе $|It|<R$. Имеет место теорема (см. [30]).

Теорема 3.4.1 (Д. А. Райков)

Функция $\varphi(t)$ *представляется формулой* (3,4,1) *во всей полосе* $|It|<R$.

Мы имеем $\varphi(0)=1$, так как $\varphi(t)$ регулярна в окрестности нуля, то существует такая окрестность нуля, где $\varphi(t)\neq 0$. В этой окрестности составим $\ln\varphi(t)$, причем берем ветвь, которая при $t=0$ имеет значение 0. Тогда в указанной окрестности $t=0$ функция

$$f(t)=\ln\varphi(t)=\beta it-\gamma t^2+\int_{-\infty}^{0}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dM(u)+$$
$$+\int_{0}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dN(u) \qquad (3,4,2)$$

будет регулярной в некоторой окрестности $t=0$. В частности, будет

$$-f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{2f(0)-f(h)-f(-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}-\frac{f(h)-f(-h)}{h^2}=$$
$$=2\gamma+2\lim_{h\to 0}\left(\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin^2\frac{hu}{2}}{h^2}\,dM(u)+\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{hu}{2}}{h^2}\,dN(u)\right). \qquad (3,4,3)$$

Отсюда заключаем, что $\int_{-\infty}^{0}u^2dM(u)$ и $\int_{0}^{\infty}u^2dN(u)$ существуют.

Такой вывод можем сделать, следуя выводу теоремы (3,1,1). Именно, при $|u| \leqslant \frac{\pi}{h} \sin^2 \frac{hu}{2} \geqslant \frac{4}{\pi^2} \frac{h^2u^2}{4} = \frac{h^2u^2}{\pi^2}$, отсюда, согласно (3,4,8), следует ограниченность $\int\limits_{-\frac{\pi}{h}}^{0} u^2 dM(u) + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{h}} u^2 dN(u)$ при $h \to 0$, что и доказывает наше утверждение.

Ввиду доказанного можно дважды дифференцировать в (3,4,2) под знаком интеграла и получить

$$-f''(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{itu} u^2 dM(u) + \int\limits_{0}^{\infty} e^{itu} u^2 dN(u) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itu} u^2 dH(u), \qquad (3,4,4)$$

где $H(u)$ — новая монотонная функция и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 dH(u) < \infty$.

Ввиду этого, $[-f''(t)]$ лишь положительным множителем отличается от х. ф. Так как $[-f''(t)]$ регулярна в некоторой окрестности нуля $|t| < r_1$, то, по теореме 3.1.2, $[-f''(t)]$ будет регулярной и, в полосе $|It| < r_1$, и будет там представляться интегралом (3,4,4). Этот интеграл будет сходиться при $|It| < r_1$. Очевидно, интегралы в (3,4,2) и подавно будут сходиться в той же полосе $|It| < r_1$ и изображать регулярную функцию.

При этом r_1 у нас было радиусом круга $|t| < r_1$, где $\varphi(t)$ регулярна и не имеет нулей. Рассмотрим ближайшие к $t = 0$ нули $\varphi(t)$ в полосе $|It| < R$. Если их нет, то можно взять $r = R$, и теорема доказана. Если они есть, то должны быть на расстоянии $< R$ от $t = 0$, иначе опять можно взять $r = R$ и обнаружить, что $f''(t)$ регулярна во всей полосе $|It| < R$ и, стало быть, в этой полосе нет нулей $\varphi(t)$.

Итак, пусть существуют нули и пусть ближайший (или ближайшие) находится на расстоянии $r_0 < R$. Тогда одно из чисел $\pm ir_0$ должно быть нулем $\varphi(t)$, ибо $f''(t)$ должна быть регулярной в полосе $|It| < r_0$ и $\varphi(t)$ не должна иметь там нулей. Это, однако, невозможно, так как $\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$, где $F(x)$ — соответствующий закон распределения, и интеграл сходится при $|It| < R$. Полагая $t = \pm ir_0$, находим

$$\varphi(\pm ir_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(\pm r_0)x} dF(x) \neq 0.$$

Таким образом, $r_0 \geqslant R$; интегралы (3,4,2) сходятся при $|It| < R$, и в этой полосе имеет место формула (3,4,2). Стало быть, в этой полосе не может быть нулей $\varphi(t)$. Если $\varphi(t)$ — целая х. ф. б. д. з., то формула (3,4,2) верна на всей плоскости, и $\varphi(t)$ не имеет нулей.

Заметим еще, что теория х. ф., аналитических в полосе, имеет тесные связи с теорией степенных рядов с положительными коэффициентами. Именно, если х. ф.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{\nu!} (it)^\nu , \tag{3,4,5}$$

где написанное равенство верно в некоторой окрестности нуля, то новая четная х. ф.

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi(t) + \varphi(-t)}{2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2\nu}}{(2\nu)!} (it)^{2\nu} \tag{3,4,6}$$

при $t = i\eta$ представляется рядом $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2\nu}}{(2\nu)!} \eta^{2\nu}$, все коэффициенты которого положительны.

Однако не всякий четный степенной ряд с положительными коэффициентами, сходящийся в какой-либо окрестности 0, будет изображать четную х. ф. Достаточно вспомнить, что между моментами з. р. существуют определенные неравенства. Например, должно быть $\alpha_2 \leqslant \alpha_4^{\frac{1}{2}}$ (см. [9]). Достаточно взять ряд $f(\eta) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{2\nu} \eta^{2\nu} \, (a_{2\nu} > 0)$, где $2a_2 > (24a_4)^{1/2}$, чтобы получить пример ряда, не изображающего четной х. ф.

Глава четвертая

РАЗЛОЖЕНИЯ И „α-РАЗЛОЖЕНИЯ" ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ, АНАЛИТИЧЕСКОЙ В ПОЛОСЕ

В настоящей главе будут рассматриваться простейшие теоремы разложения з. р. для случаев, когда соответствующая х. ф. регулярна в полосе $|It| < R$ $(t = \xi + i\eta)$. Пусть $F(x)$ — з. р. с соответствующей х. ф. $\varphi(t)$. Пусть $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$, т. е. соответствующая случайная величина есть сумма двух независимых случайных величин X_1 и X_2 с з. р. F_1 и F_2 и х. ф. φ_1 и φ_2. Тогда имеем (см. введение):

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)\,dF_2(x-u) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-u)\,dF_2(u).$$

Аналогичные формулы будут иметь место и для случая разложения на $n > 2$ независимых слагаемых; этот случай легко сводится к основному случаю $n = 2$. Простейшие задачи разложения з. р. будут состоять в описании общих аналитических свойств компонент F_1 и F_2 (или соответственно определяющих их φ_1 и φ_2) на основании свойств F (или φ).

Наиболее простая теорема такого вида была обнаружена Д. А. Райковым [30].

§ 1. ТЕОРЕМА Д. А. РАЙКОВА И ЕЕ УСИЛЕНИЯ

Теорема 4.1.1 (Д. А. Райков)

Пусть характеристическая функция закона распределения $F(x)$ регулярна в полосе $|I(t)| < R$. Тогда в той же полосе регулярны и х. ф. любых компонент закона $F(x)$.

Заметим, что интересен лишь случай, когда у закона $F(x)$ имеются нетривиальные компоненты (з. р. $F(x)$ разложим). Пусть это так и пусть

$$F = F_1 * F_2; \quad \varphi(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t), \tag{4,1,1}$$

где φ_1 и φ_2 соответствующие х. ф.

Согласно теореме 3.1.2, ввиду регулярности $\varphi(t)$ в полосе $|It| < R$ имеем (см. (3,1,4)):

$$1 - F(x) = O(e^{-rx});\ F(-x) = O(e^{-rx})\ (x \to \infty) \qquad (4,1,2)$$

при любом $r < R$. Далее используем соотношение:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-u)\,dF_2(u); \qquad (4,1,3)$$

$$1 - F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_1(x-u))\,dF_2(u). \qquad (4,1,4)$$

Пусть u_0 точка роста з. р. $F_2(u)$; $x > 3|u_0| + 1$;

$$0 < \varepsilon < \min\left(|u_0|,\ \frac{1}{3}\right).$$

Имеем из (4,1,4):

$$1 - F(x) > \int_{u_0-\varepsilon}^{u_0+\varepsilon} (1 - F_1(x-u))\,dF_2(u) >$$

$$> \varepsilon_1 (1 - F_1(x - u_0 + \varepsilon)), \qquad (4,1,5)$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$. В силу первого из соотношений (4,1,2) имеем:

$$1 - F_1(x - u_0 + \varepsilon) = O(e^{-rx}) = O(e^{-r(x-u_0+\varepsilon)}) \qquad (4,1,6)$$

при $x \to \infty$. Таким образом,

$$1 - F_1(x) = O(e^{-rx})\ (x \to \infty). \qquad (4,1,7)$$

Докажем, что $F_1(x)$ верно и вторoe из соотношений (4,1,2). Для этого в (4,1,4) заменим x на $(-x)$, считая $x \geqslant 0$,

$$F(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(-x-u)\,dF_2(u). \qquad (4,1,8)$$

Сохраняя те же обозначения для точки роста u_0 и чисел ε, ε_1, найдем

$$F(-x) > \int_{u_0-\varepsilon}^{u_0+\varepsilon} F_1(-x-u)\,dF_2(u) > \varepsilon_1 F_1(-x - u_0 - \varepsilon). \qquad (4,1,9)$$

В силу второго из соотношений (4,1,2) получаем

$$F_1(-x) = O(e^{-rx})\ (x \to \infty). \qquad (4,1,10)$$

Теорема 3.1.2. доказывает теорему 4.1.1. Разумеется, если $F = F_1 * F_2 * \ldots * F_n$ разлагается на много компонент, то каждая из них будет подчиняться теореме 4.1.1.

Мы можем показать далее, что возрастание моментов компоненты $F_1(x)$ при увеличении номера момента не может быть быстрее возрастания соответствующих моментов $F(x)$.

Обозначим при $p > 0$

$$\beta_{1p} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p\,dF_1(x);\ \beta_p = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p\,dF(x). \qquad (4,1,11)$$

Имеет место теорема (4.1.2).

Теорема 4.1.2 (Д. Дюгэ)

$$\beta_{1p} < K_0\beta_p + K_1^p, \tag{4,1,12}$$

где $K_0 > 0$, $K_1 > 0$ константы, не зависящие от p.

Воспользуемся неравенствами (4,1,5) и (4,1.9), вывод которых не был связан с регулярностью $\varphi(t)$, х. ф. для $F(x)$.

$$\left.\begin{aligned} 1 - F_1(x - u_0 - \varepsilon) &\leqslant \frac{1}{\varepsilon_1}(1 - F(x)); \\ F_1(-x - u_0 - \varepsilon) &\leqslant \frac{1}{\varepsilon_1} F(-x). \end{aligned}\right\} \tag{4,1,13}$$

Для доказательства рассмотрим сперва

$$\int_0^\infty x^p dF(x) = -\int_0^\infty x^p d(1 - F(x)) \leqslant$$

$$\leqslant (u_0 + \varepsilon)^p - \int_{u_0+\varepsilon}^\infty x^p d(1 - F(x)). \tag{4,1,14}$$

Покажем теперь, что если $\beta_p < \infty$, то

$$x^p(1 - F(x)) \to 0 \quad \text{при } x \to \infty. \tag{4,1,15}$$

В самом деле, поскольку $-\int_0^\infty x^p d(1 - F(x))$ сходится, то при $x_1 \to \infty$, $x_2 > x$,

$$-\int_{x_1}^{x_2} x^p d(1 - F(x)) > x_1^p\,[(1 - F(x_1)) - (1 - F(x_2))] \to 0.$$

При данном x_1 и $x_2 \to \infty$, $1 - F(x_2) \to 0$, откуда и выводим (4,1,15). Далее, соответственно (4,1,14),

$$-\int_{u_0+\varepsilon}^\infty x^p d(1 - F(x)) = x^p(1 - F(x))\Big|_{u_0+s}^\infty + p\int_{u_0+\varepsilon}^\infty x^{p-1}(1 - F(x))\,dx =$$

$$= O((u_0 + \varepsilon)^p + p\int_{u_0+\varepsilon}^\infty x^{p-1}(1 - F(x))\,dx.$$

Согласно (4,1,13), это выражение не меньше

$$O((u_0 + \varepsilon)^p) + p\varepsilon_1 \int_{u_0+\varepsilon}^\infty x^{p-1}(1 - F_1(x - u_0 - \varepsilon))\,dx =$$

$$= O((u_0 + \varepsilon)^p) + p\varepsilon_1 \int_0^\infty y^{p-1}(1 - F_1(y))\,dy. \tag{4,1,16}$$

Далее, согласно (4,1,15) и (4,1,13), имеем:

$$x^p(1 - F_1(x)) \to 0 \quad \text{при } x \to \infty.$$

Ввиду этого:

$$p\int_0^\infty y^{p-1}(1-F_1(y))\,dy=\int_0^\infty y^p dF_1(y)=\beta_{1p}.$$

Таким образом, из сказанного выше следует неравенство

$$\int_0^\infty y^p dF(y)+O((u_0+\varepsilon)^p)\geqslant\int_0^\infty y^p dF_1(y)+O((u_0+\varepsilon)^p). \quad (4,1,17)$$

Рассмотрим второе из неравенств (4,1,13). Как и ранее, выводим, что

$$\lim_{x\to\infty} x^p F(-x)=0, \quad (4,1,18)$$

откуда с помощью (4,1,13) находим

$$\lim_{x\to\infty} x^p F_1(-x)=0. \quad (4,1,19)$$

Отсюда и из (4,1,13)

$$\int_{-\infty}^0 |x|^p dF(x)=-\int_0^\infty x^p dF(-x)=p\int_{u_0+\varepsilon}^\infty x^{p-1}F(-x)\,dx\geqslant$$

$$\geqslant p\int_{u_0+\varepsilon}^\infty x^{p-1}F_1(-x-u_0-\varepsilon)\,dx+O((u_0+\varepsilon)^p)=$$

$$=p\int_0^\infty y^{p-1}F_1(-y)\,dy+O((u_0+\varepsilon)^p)=$$

$$=-\int_0^\infty y^p dF(-y)+O((u_0+\varepsilon)^p). \quad (4,1,20)$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^0 x^p dF(x)\geqslant\int_{-\infty}^0 x^p dF_1(x)+O((u_0+\varepsilon)^p). \quad (4,1,21)$$

Из (4,1,17) и (4,1,21) находим

$$\beta_p\geqslant\beta_{1p}+O((u_0+\varepsilon)^p), \quad (4,1,22)$$

что и доказывает 4,1,12.

Рассмотрим теперь разложения з. р. с целой х. ф.

Теорема 4.1.3

Если закон распределения $F(x)$ имеет целую характеристическую функцию $\varphi(t)$, то порядок характеристической функции любой его компоненты не выше порядка $\varphi(t)$.

Таким образом, если

$$F=F_1*F_2;\ \varphi(t)=\varphi_1(t)\,\varphi_2(t), \quad (4,1,23)$$

где φ_1 и φ_2 х. ф., отвечающие F_1 и F_2, то порядок $\varphi_1(t)$, как целой функции не выше порядка $\varphi(t)$.

То, что $\varphi_1(t)$ целая функция, следует из теоремы 4.1.1.

Далее, можем считать порядок $\varphi(t)$ конечным, иначе наше высказывание тривиально. Пусть ρ порядок $\varphi(t)$ (см. § 8, гл. I). Тогда $\rho = \inf\limits_{(A)} A$, где A такие числа, что

$$M(r) = O(e^{r^A}), \tag{4,1,24}$$

см. (1,8,1). Пусть A какое-либо число под условием (4,1,24), а $M_1(r) = \sup\limits_{|t| \leq r} |\varphi_1(t)| = \sup\limits_{|t| = r} |\varphi_1(t)|$.

Имеем:

$$M_1(r) = \max(\varphi_1(ir), \varphi_1(-ir)); \tag{4,1,25}$$

$$M(r) = \max(\varphi(ir), \varphi(-ir)); \tag{4,1,26}$$

$$\varphi_1(\pm ir)\varphi_2(\pm ir) = \varphi(\pm ir). \tag{4,1,27}$$

Далее,

$$\varphi_2(\pm ir) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(\mp rx) dF_2(x) > \varepsilon_0 \tag{4,1,28}$$

($\varepsilon_0 > 0$ — константа), отсюда

$$\varphi_1(\pm ir) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0} \varphi(\pm ir) \tag{4,1,29}$$

и

$$\varphi_1(\pm ir) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0} M(r), \tag{4,1,30}$$

откуда и следует наша теорема.

Аналогично доказывается теорема (4.1.4).

Теорема 4.1.4

Если в условиях теоремы 4.1.3 характеристическая функция $\varphi(t)$ з. р. $F(x)$ есть функция экспонентного типа τ, то любая компонента з. р. $F(x)$ имеет характеристическую функцию не большего экспонентного типа.

В самом деле, имеем:

$$M(r) = O(e^{(\tau+\varepsilon) r} \tag{4,1,31}$$

для любого $\varepsilon > 0$. В силу (4,1,31),

$$\varphi_1(\pm ir) = O(M(r)),$$

что и доказывает требуемое.

Теоремы 4.1.1—4.1.4 могут быть усилены в некотором направлении. Все они трактуют о разложении з. р. $F(x)$ с х. ф. $\varphi(t)$ на компоненты $F = F_1 * F_2$ с х. ф. $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ и

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t). \tag{4,1,32}$$

Можно ослабить условия этих теорем, считая, что равенство (4,1,23) соблюдается не во всех точках t реальной оси, а лишь в некоторой последовательности реальных чисел $t_k \to 0$

$$\varphi(t_k) = \varphi_1(t_k)\varphi_2(t_k).$$

Кроме того, можно считать, что $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — х. ф. и не предполагать этого относительно $\varphi(t)$.

Теорема 4.1.5 *

Пусть $\varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$ *характеристические функции и* $\varphi(t)$ — *функция, регулярная в полосе* $|It| < R$ $(R > 0)$, *и обладающая свойством эрмитовости* $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$. *Пусть в последовательности различных реальных точек* $\{t_k\}$, $t_k \to 0$, *имеет место равенство*

$$\varphi_1(t_k)\varphi_2(t_k) = \varphi(t_k). \tag{4,1,33}$$

Тогда $\varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$ *регулярны в полосе* $|It| < R$, *и равенство вида* (4,1,33) *имеет место для всех точек* t *этой полосы, так что* $\varphi(t)$ — *характеристическая функция.*

Доказательство этой теоремы требует ряда лемм. Беря сопряженные к обеим частям равенства (4,1,33), получим

$$\overline{\varphi_1(t_k)}\,\overline{\varphi_2(t_k)} = \overline{\varphi(t_k)}.$$

Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ обладают свойством эрмитовости как х. ф., а функция $\varphi(t)$ — по условию. Поэтому (4,1,33) дает

$$\varphi_1(-t_k)\varphi_2(-t_k) = \varphi(-t_k).$$

Перемножая это и предыдущее равенство, находим

$$\varphi_1(t_k)\varphi_1(-t_k)\varphi_2(t_k)\varphi_2(-t_k) = \varphi(t_k)\varphi(-t_k). \tag{4,1,34}$$

Положим

$$\varphi_1(t)\varphi_1(-t) = f_1(t);\quad \varphi_2(t)\varphi_2(-t) = f_2(t);\quad \varphi(t)\varphi(-t) = f(t).$$

Тогда получим четные х. ф. $f_1(t)$ и $f_2(t)$, реальные и даже неотрицательные на всей реальной оси, и четную функцию $f(t)$, регулярную в полосе $|It| < R$. В силу (4,1,34) получим

$$f_1(t_k)f_2(t_k) = f(t_k). \tag{4,1,35}$$

Так как $t_k \to 0$ и все функции, входящие в (4,1,35), непрерывны, а $f_1(0) = f_2(0) = 1$, то и $f(0) = 1$. Далее, в силу той же непрерывности $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f(t)$ они отличны от 0 (положительны) при $|t| \leqslant \delta_0$, при достаточно малом $\delta_0 > 0$.

За счет изменения нумерации реальных чисел $t_k \to 0$, будем считать, что все они лежат в сегменте $|t| \leqslant \delta$. Кроме того, очевидно, можно все t_k считать положительными. Полагаем $f(t) = \exp g(t)$ при $|t| \leqslant \delta_0$, где $g(t)$ непрерывная четная функция.

* Эта теорема является некоторым вариантом теоремы из работы автора [23], на случай, когда $\varphi(t)$ может иметь нули.

Пусть $f_j(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF_j(x)$ $(j = 1, 2)$, где $F_j(x)$ з. р., отвечающий $f_j(t)$.

Лемма 1

Функции $f_j(t)$ дважды дифференцируемы на всей оси.

Согласно § 1 гл. 3, достаточно доказать существование вторых моментов $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_j(x)$.

Имеем:

$$f_j(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF_j(x) = 1 - 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{tx}{2} dF_j(x) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(-2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{tx}{2} dx_l F(x)\right), \qquad (4,1,36)$$

ибо при $0 \leqslant u < 1$ $1 - u \leqslant e^{-u}$.

Полагая $t = t_k$, имеем из (4,1,36):

$$f_1(t_k) f_2(t_k) = e^{g(t_k)}\ ;\ -2\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{t_k x}{2} dF_j(x) \geqslant g(t_k), \quad (4,1,37)$$

или

$$-\frac{1}{2} g(t_k) \geqslant \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{t_k x}{2} dF_j(x).$$

Полагая $-\frac{1}{2} g(t_k) = \beta_1 t_k^2 + O(t_k^4)$ (ибо $g(t)$ четная функция, регулярная в $|t| \leqslant \delta_0$), видим, что должно быть $\beta_2 > 0$ и

$$\beta_2 t_k^2 + O(t_k^4) \geqslant \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{t_k x}{2} dF_j(x). \qquad (4,1,38)$$

Учитывая, что $\sin \xi \geqslant \frac{2}{\pi} \xi$ при $0 \leqslant \xi \leqslant \frac{\pi}{2}$, находим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{t_k x}{2}\right) dF_j(x) \geqslant \frac{t_k^2}{\pi^2} \int\limits_{-\frac{\pi}{t_k}}^{\frac{\pi}{t_k}} x^2 dF_j(x). \qquad (4,1,39)$$

Внося в (4,1,38) и сокращая на t_k, находим

$$\beta_2 + O(t_k^2) \geqslant \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\frac{\pi}{t_k}}^{\frac{\pi}{t_k}} x^2 dF_j(x).$$

Пусть $t_k \to 0$, находим, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_j(x) < \infty$, что и доказывает лемму.

Лемма 2

Функции $f_j(t)$ имеют производные всех порядков на всей реальной оси.

Зная, что существует $f_j''(t)$, будем действовать по индукции.

Допустим, что существует $f_j^{(2q)}(t)$ и докажем существование $f_j^{(2q+2)}(t)$.

Произведение $f_1(t) f_2(t)$ продифференцируем $2q$ раз и разобьем на три суммы

$$(f_1(t) f_2(t))^{(2q)} = S_1(t) + S_2(t) + S_3(t), \tag{4,1,40}$$

где $S_1(t)$ содержит $f_j^{(2q)}(t)$ ($j=1$ или 2), $S_2(t)$ содержит хотя бы одну производную нечетного порядка, а $S_3(t)$ состоит из производных только четного порядка, меньшего, чем $2q$. Возвращаясь к равенству (4,1,35), имеющему место для всех t_k, заметим, что обе его части дифференцируемы $2q$ раз и реальны.

Применим известную теорему Ролля: между двумя корнями дифференцируемой функции лежит корень ее производной. Отсюда следует, что если продифференцировать обе части равенства (4,1,35) то они будут совпадать в последовательности чисел $t_m \to 0$, лежащих между числами t_k, или совпадающих с ними. Снова дифференцируем обе получающиеся функции и применим теорему Ролля. Получаем, что вторые производные будут совпадать в бесконечной последовательности различных реальных чисел $t_{k_2} \to 0$. Действуя далее таким образом, убедимся, что $2q$-е производные функций $f_1(t) f_2(t)$ и $f(t)$ будут совпадать в бесконечной последовательности чисел $t_{k,\,2q} \to 0$.

Для упрощения записи, переименуем эти числа $t_{k,\,2q}$ в числа t_k'. Имеем:

$$S_1(t) = f_1^{(2q)}(t) f_2(t) + f_1(t) f_2^{(2q)}(t) = \\ = \sum_{j=1}^{2} f_j^{(2q)}(t) \frac{1}{f_j(t)} f_1(t) f_2(t). \tag{4,1,41}$$

$S_2(t)$ должна иметь в каждом своем слагаемом по крайней мере две производные нечетных порядков (может быть, повторение одной и той же). Далее, $S_3(t)$, состоящая из производных четных порядков $< 2q$, и, стало быть, дважды дифференцируемая, — четная функция. Поэтому существует конечный предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{S_3(t_k') - S_3'(0)}{t_k'^2} = s_3. \tag{4,1,42}$$

Далее, $S_2(0)=0$. Каждое слагаемое $S_2(t)$ содержит по крайней мере два множителя вида $f^{(2k+1)}(t)$, являющихся нечетными функциями. Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{S_2\left(t'_k\right)-S_2(0)}{t_k'^2}=s_2, \tag{4,1,43}$$

существует и конечен. Обращаясь к (4,1,41), видим, что $\psi_j(t)=\frac{1}{f_j(t)}f_1(t)f_2(t)$ дважды дифференцируемые в окрестности 0 четные функции и $\psi_j(0)=1$, так что

$$\psi_j(t)=1+b_jt^2+o(t^2) \tag{4,1,44}$$

Таким образом,

$$S_1(t)-S_1(0)=\sum_{j=1}^{2}f_j^{(2q)}(t)\psi_j(t)-\sum_{j=1}^{2}f_j^{(2q)}(0)=$$
$$=S_{11}(t)+t^2S_{12}(t)+o(t^2), \tag{4,1,45}$$

где

$$S_{11}(t)=\sum_{j=1}^{2}f_j^{(2q)}(t)-f_j^{(2q)}(0)),$$

$$S_{12}(t)=\sum_{j=1}^{2}b_jf^{(2q)}(t).$$

Выражение (4,1,40) при $t=t'_k$ совпадает с $f^{(2q)}(t)=f^{(2q)}(0)+$ $+c_0t^2+O(t^4)$.

Используя (4,1,40—4,1,43 и 4,1,45), находим, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{S_{11}\left(t'_k\right)}{t_k'^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{t_k'^2}\sum_{j=1}^{2}(f_j^{(2q)}(t'_k)-f^{(2q)}(0))=s_{11} \tag{4,1,46}$$

существует и конечен. Далее,

$$f_j^{(2q)}(t)-f_j^{(2q)}(0)=(-1)^q2\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{t'_kx}{2}x^{2q}dF_j(x). \tag{4,1,47}$$

Из (4,1,46) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{t'_kx}{2}x^{2q}dF_1(x)+\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{t'_kx}{2}x^{2q}dF_2(x)=O(t_k'^2). \tag{4,1,48}$$

Отсюда обычным приемом (см. 4,1,39) выводим, что при $n\to\infty$

$$\int_{-\frac{\pi}{t'_k}}^{\frac{\pi}{t'_k}}x^{2q+2}dF_j(x)+\int_{-\frac{\pi}{t'_k}}^{\frac{\pi}{t'_k}}x^{2q+2}dF_2(x)=O(1), \tag{4,1,49}$$

таким образом, существуют $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2q+2}dF_j(x)$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2q+2}dF_1(x)$, и, стало быть, $f^{(2q+2)}(t)$ справедливо для всех реальных t. Это доказывает лемму 2.

Лемма 3

Функции $f_j(t)$ регулярны при $|t|<R$.

Нам нужно получить оценки для $f_j^{(2q)}(0)$. Имеем при $t = t_k'$ (сохраняем прежние обозначения):

$$(f_1(t)f_2(t))^{(2q)} = f^{(2q)}(t). \tag{4,1,50}$$

Заметим, что при $2q$-кратном дифференцировании в левой части при $t=0$ все производные нечетного порядка исчезнут, а все остальные слагаемые будут иметь один и тот же знак $(-1)^q$. Член, содержащий $f^{(2q)}(t)$ при $t=0$, равен $(-1)^q j^{(2q)}(0)$. Далее, обе части (4,1,50) непрерывны. Так как (4,1,50) имеет место при $t=t_k'\to 0$, то оно же верно и при $t=0$. Ввиду вышесказанного (так как слагаемые при $t=0$ одного знака) получим

$$|f_j^{(2q)}(0)| \leqslant |f^{(2q)}(0)|. \tag{4,1,51}$$

Четная функция $f(t)$ регулярна в круге $|t|<R$, так что

$$|f^{(2q)}(0)| < \frac{n!}{(R-\varepsilon)^n} \tag{4,1,52}$$

при сколь угодно малом фиксированном $\varepsilon>0$ и $n>n_0(\varepsilon)$ (см. гл. I). Отсюда следует, что

$$|f_j^{(2q)}(0)| < \frac{n!}{(R-\varepsilon)^n} \quad (n>n_0(\varepsilon)). \tag{4,1,53}$$

Таким образом, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2q}dF_j(x) < \frac{n!}{(R-\varepsilon)^n}$ $(n>n_0(\varepsilon))$, откуда следует, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{r|x|}dF_j(x)$ сходится при $0\leqslant r<R-2\varepsilon$ и $f_j(t)$ регулярна в круге $|t|<R$ (ввиду произвольной малости $\varepsilon>0$). В силу теоремы 3.1.2 $f_j(t)$ будут регулярны и в полосе $|It|<R$. Далее, $f_j(t)=\varphi_j(t)\varphi_j(-t)$ при реальных t, причем $\varphi_j(t)$ и $\varphi_j(-t)$ — х. ф. В силу теоремы 4.1.1 х. ф. $\varphi_j(t)$ и $\varphi_j(-t)$ должны быть регулярны в той же полосе $|It|<R$.

Далее, равенства (4,1,33) должны быть верны во всей полосе $|It|<R$, ибо все входящие в него функции регулярны там. Теорема 4.1.5 полностью доказана.

Заметим, что в ее формулировке вместо регулярности $\varphi(t)$ в полосе $|It|<R$ достаточно было бы предполагать ее регулярность в круге $|t|<R$, ибо, как видно из доказательства,

$\varphi_j(t)$ оказываются регулярными в указанной полосе, а $\varphi(t)$ является их произведением.

Заметим еще, что условия теорем 4.1.2—4.1.4 могут быть соответственно ослаблены. Вместо требования, чтобы з. р. $F(x)$ имел компоненту $F_1(x)$, что отвечает разложению

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) \tag{4,1,54}$$

х. ф. $\varphi(t)$ на х. ф. $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, достаточно потребовать равенства

$$\varphi(t_k) = \varphi_1(t_k)\varphi_2(t_k) \tag{4,1,55}$$

для последовательности каких-либо различных реальных чисел $t_k \to 0$.

В этом случае будем говорить, что з. р. F имеет t_k — компоненту F_1 и F_2 с х. ф. $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Таким образом, теоремы 4.1.1—4.1.4 верны, если под компонентами з. р. F понимать его t_k-компоненты.

§ 2 „α-РАЗЛОЖЕНИЯ“

Разобранные выше теоремы могут быть еще модифицированы за счет ослабления их условий. Такие модифицированные теоремы имеют некоторые сравнительно неожиданные и небезынтересные применения, которые будут указаны далее. При этом, однако, нужно отказаться от условий регулярности в полосе и рассматривать функции, регулярные в окрестности нуля.

Пусть $\varphi(t)$ — х. ф. Так как $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(t)$ непрерывны, то существует сегмент $|t| \leqslant \delta_0$, где $\varphi(t) \neq 0$. Пусть $\alpha > 0$ — положительное число. Составим $\ln\varphi(t)$ при $|t| \leqslant \delta_0$, выбирая ту ветвь логарифма, которая реальна при положительном аргументе, так что $\ln\varphi(0) = 0$. Далее, полагаем $(\varphi(t))^\alpha = \exp(\alpha \ln\varphi(t))$ при $|t| \leqslant \delta_0$. Как было замечено выше (см. § 2, гл. 3), $\varphi(t))^\alpha$ не всегда является х. ф.

Теорема 4.2.1 (Ю. В. Линник)

Пусть $\varphi(t)$ регулярна и не имеет нулей в круге $|t| < R$, а также обладает свойством эрмитовости: $\varphi(-t) = \overline{\varphi(\bar{t})}$. Пусть для последовательности различных реальных чисел $t_k \to 0$ имеет место соотношение

$$(\varphi_1(t_k))^{\alpha_1}(\varphi(t_k))^{\alpha_2}\dots, (\varphi_s(t_k))^{\alpha_s} = \varphi(t_k), \tag{4,2,1}$$

где $\varphi_j(t)$ характеристические функции и $\alpha_j > 0$ $(j = 1, 2, \dots, s)$.

Тогда $\varphi_j(t)$ регулярны в том же круге, не имеют там нулей, и равенство (4,2,1) *верно для всех $|t| < R$.*

Заметим, что в случае целых α_j, эта теорема сразу сводится к теореме 4.1.5, ибо в этом случае $(\varphi_j(t))^{\alpha_j}$, очевидно, будут х. ф.; их произведения будут также х. ф. Если числа α_j рациональные; то эту теорему также можно свести к теореме 4.1.5. Именно, можно положить $\alpha_j = \frac{m_j}{n}$, где n и m_j целые числа. Возводя равенство (4,2,1) в степень n, получим слева произведение х. ф.

Если же числа α_j — иррациональные, то подобные приемы не действуют; попытки применить здесь теорию диофантовых приближений пока не привели к результату.

Доказательство теоремы 5.1.1 будет во многом сходно с доказательством теоремы 4.1.5 и также потребует ряда лемм. Как и в § 1 этой главы, вводим

$$f(t) = \varphi(t)\varphi(-t);\ f_j(t) = \varphi_j(t)\varphi_j(-t)\ \ (j=1,\ 2, \ldots,\ s), \qquad (4,2,2)$$

где $f|t|$ — четная функция, регулярная в круге $|t| < R$,. и $f_j(t)$ четные х. ф., положительные в некоторой окрестности при $|t| < \delta_0$. Изменяя, в случае надобности, нумерацию чисел $t_k \to 0$ и считая их положительными (что, очевидно, допускается в силу четности $f(t)$ и $f_j(t)$), можем считать, что $0 < t_k < \delta_0$ и что

$$(f_1(t_k))^{\alpha_1} \ldots (f_s(t_k))^{\alpha_s} = f(t_k). \qquad (4,2,3)$$

Далее, считаем, что $f(t) = \exp g(t)$ при $|t| \leqslant \delta_0$, где $g(t)$ — непрерывная четная функция.

Лемма 4

Функции $f(t)$ $(j = 1,\ 2, \ldots,\ s)$ дважды дифференцируемы на всей оси.

Для доказательства составляем равенства вида (4,1,36) $(j = 1,\ 2, \ldots,\ s)$; из (4,2,3) выводим, что

$$(f_1(t_k))^{\alpha_1} \ldots (f_s(t_k))^{\alpha_s} = e^{g(t_k)},$$

$$-2\sum_{j=1}^{s} \alpha_j \sin^2 \frac{t_k x}{2}\, dF_j(x) \geqslant g(t_k). \qquad (4,2,4)$$

Отсюда ввиду $\alpha_j > 0$ как в (4,1,37) — (4,1,39) заключаем, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_j(x) < \infty$, что и доказывает лемму.

Лемма 5

Функции $f_j(t)$ имеют производные всех порядков на всей реальной оси.

Эта лемма доказывается вполне аналогично лемме 2 для теоремы 4.1.5. Мы доказали существование $f_j''(t)$ $(j=1,\ 2, \ldots, s)$. Допустим, что существуют $f_j^{(2q)}(t)$, и докажем существование $f_j^{(2q+2)}(t)$.

Составляем аналог (4,1,40)

$$((f_1(t))^{\alpha_1}\ldots(f_s(t))^{\alpha_s})^{(2q)}=S_1(t)+S_2(t)+S_3(t), \qquad (4,2,5)$$

где $S_i(t)$ $(i=1, 2, 3)$ определяются так же, как в (4,1,40).

Применяя теорему Ролля, как и в доказательстве леммы 2 теоремы 4.1.5, находим, что существует последовательность различных положительных чисел $t'_k\to 0$ таких, что (4,2,5) при $t=t'_k$ совпадает с $(f(t))^{(2q)}$. Далее,

$$S_1(t)=\sum_{j=1}^{s}\alpha_j f_j^{(2q)}(t)\frac{1}{f_j(t)}\prod_{j=1}^{s}(f_j(t))^{\alpha_j}. \qquad (4,2,6)$$

Соображения о поведении $S_i(t)$ $(i=1, 2, 3)$ те же, что и в указанном месте § 1 гл. 4, приведут к существованию

$$\lim_{k\to\infty}\frac{S_3(t'_k)-S_3(0)}{t'^2_k}=s_3; \qquad (4,2,7)$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{S_2(t'_k)-S_2(0)}{t'^2_k}=s_2. \qquad (4,2,8)$$

Мы видим далее, что

$$\frac{1}{f_j(t)}\prod_{j=1}^{s}(f_j(t))^{\alpha_j}=\psi_j(t)$$

четные и дважды дифференцируемые в окрестности 0 функции, причем $\psi_j(0)=1$, так что

$$\psi_j(t)=1+b_jt^2+o(t^2). \qquad (4,2,9)$$

Таким образом,

$$S_1(t)-S_1(0)=\sum_{j=1}^{s}\alpha_j f_j^{(2q)}(t)\psi_j(t)-\sum_{j=1}^{s}\alpha_j f_j^{(2q)}(0)=$$
$$=S_{11}(t)+t^2S_{12}(t)+S_{13}(t), \qquad (4,2,10)$$

где

$$S_{11}(t)=\sum_{j=1}^{s}\alpha_j(f^{(2q)}(t)-f^{(2q)}(0)); \qquad (4,2,11)$$

$$S_{12}(t)=\sum_{j=1}^{s}\alpha_j b_j f^{(2q)}(t); \qquad (4,2,12)$$

$$S_{13}(t)=o(t^2). \qquad (4,2,13)$$

Кроме того,

$$f^{(2q)}(t)=f^{(2q)}(0)+c_0t^2+O(t^4). \qquad (4,2,14)$$

Выражение (4,2,5) совпадает с (4,2,14) в точках $t=t'_k$.

Используя (4,2,7) — (4,2,14), находим, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{S_{11}(t'_k)}{t'^2_k}=s_{11} \qquad (4,2,15)$$

существует и конечен. Отсюда выводим

$$(-1)^q 2\sum_{j=1}^{s}\alpha_j\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{t'_k x}{2}x^{2q}dF_j(x)=O\left(t'^2_k\right). \qquad (4,2,16)$$

Так как $\alpha_j>0$, то отсюда выводим (см. (4,1,38) и (4,1,39)):

$$\sum_{j=1}^{s}\alpha_j\int_{-\frac{\pi}{t'_k}}^{\frac{\pi}{t'_k}}x^{2q+2}dF_j(x)=O(1). \qquad (4,2,17)$$

Отсюда следует существование $\int_{-\infty}^{\infty}x^{2q+2}dF_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, s)$, что и доказывает лемму 5.

Лемма 6

Функции $f_j(t)$ регулярны в некоторой окрестности нуля.

Доказательство этой леммы сложнее, чем соответствующей леммы 3 § 1. Прежде всего предполагаем, что $\alpha_j>1$. Этого можно достигнуть за счет возведения исходного равенства (4,2,1) в надлежащую целую степень.

Теперь для получения оценки $|f_j^{(2q)}(0)|$ возведем уравнение (4,2,3) в степень $2q$ и продифференцируем его левую часть $2q$ раз. Функцию $(f(t))^{2q}$ временно обозначим $f_0(t)$. Важно заметить, что при $t=0$ все производные нечетного порядка в левой части исчезнут.

Все остальные слагаемые при $t=0$ будут иметь знак $(-1)^q$. При этом важно, что все коэффициенты вида

$$2q\alpha_1(2q\alpha_1-1)(2q\alpha_1-2)\ldots 2q\alpha_s(2q\alpha_s-1)\ldots$$

будут положительны, ибо $2q\alpha_j>2q$. Полученные справа и слева выражения будут совпадать в последовательности точек $t'_k\to 0$, и так как они являются непрерывными в окрестности нуля, то будут совпадать и при $t=0$. Оставляя в сумме, получившейся в левой части, с членами одного и того же знака $(-1)^q$ только члены, содержащие $f_j^{(2q)}(0)$, находим

$$\left|\sum_{j=1}^{s}2q\alpha_j f_j^{(2q)}(0)\right|\leqslant|f_0^{(2q)}(0)|. \qquad (4,2,18)$$

Таким образом,

$$|f_j^{(2q)}(0)|\leqslant\frac{1}{2q\alpha_j}|f_0^{(2q)}(0)|;\quad j=1, 2, \ldots, s. \qquad (4,2,19)$$

Правую часть оцениваем с помощью интеграла Коши

$$f_0^{(2q)}(0)=\frac{(2q)!}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=\frac{R}{2}}\frac{(f(t))^{2q}}{t^{2q+1}}dt. \qquad (4,2,20)$$

Пусть $M_0=\sup\limits_{|t|=\frac{R}{2}}|f(t)|$. Тогда из (4,2,20) выводим

$$f_0^{(2q)}(0)\leqslant(2q)!\,M_0^{(2q)}\left(\frac{2}{R}\right)^{2q}=(2q)!\,M_1^{2q}, \qquad (4,2,21)$$

где $M_1=\frac{2M_0}{R}$.

Отсюда заключаем, что

$$|f_j^{(2q)}(0)|\leqslant\frac{1}{2q\alpha_j}(2q)!\,M_1^{2q}<(2q)!\,M_1^{2q} \text{ при } j=1,2,\ldots,s. \quad (4,2,22)$$

Отсюда обычными рассуждениями о х. ф. $f_j(t)$ [см. § 1 этой главы, формулу (4,1,53) и ниже] заключаем, что $f_j(t)$ регулярна в полосе $|It|<\frac{1}{M_1}$. Итак, справа и слева в равенстве (4,2,3) стоят функции голоморфные, отличные от 0 и совпадающие в последовательности точек $t_k\to 0$. Отсюда следует, что равенство (4,2,20) имеет место во всем круге $|t|<\frac{1}{M_1}$ (если бы было известно, что $\varphi(t)\neq 0$ в полосе $|It|<\frac{1}{M_1}$, то равенство имело бы место во всей полосе).

Положим теперь $it=z=x_1+ix_2$, так что

$$f_j(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{zu}dF_j(u)\,v_j(z). \qquad (4,2,23)$$

Интеграл в правой части (4,2,23) сходится по крайней мере при $|z|<M_0^{-1}$. При $z=x_1$, $v_j(z)=v_j(x_1)$ образуют четные ряды с положительными коэффициентами. Имеем при $|z|<M_0^{-1}$

$$\prod_{i=1}^{s}(v_j(z))^{\alpha_j}=v(z), \qquad (4,2,24)$$

где $v(z)$ регулярна в круге $|z|<R$.

Лемма 7

Функции $f_j(z)$ регулярны в круге $|z|<R$.

Нам нужно доказать, что $v_j(z)$ регулярны в $|z|<R$. Пусть это не так, тогда радиусы сходимости некоторых из этих рядов должны быть меньше R. Пусть минимальный из них — r_1 для ряда $v_1(z)$ (что, разумеется, не нарушает общности) и $r_1<R$.

Функции $v_j(z)$ разлагаются в ряды с неотрицательными коэффициентами. Согласно теореме Прингсхейма — Ландау (теорема 1.11.1) точка $z=r_1$ должна быть особой точкой $v_1(z)$. Рассмотрим точку $r_\Delta=r_1-\Delta$, где $\Delta<\frac{r_1}{2}$ — малое положительное число. Имеем из (4,2,24)

$$\prod_{j=1}^{s}(v_j(r_\Delta+\xi))^{\alpha_j}=v(r_\Delta+\xi) \quad \text{при } |\xi|<\Delta. \tag{4,2,25}$$

Ряды $v_j(r_\Delta+\xi)$ по степеням ξ имеют неотрицательные коэффициенты. Оценим коэффициент при ξ^q, равный

$$\frac{1}{q!}(v_j(r_\Delta+\xi))^{(q)}\Big|_{\xi=0}.$$

Для этого возведем (4,2,25) в степень q, продифференцируем q раз и положим $\xi=0$.

В силу того, что $q\alpha_j>q$, как и ранее (при доказательстве леммы 5), получим суммы положительных членов, так что найдем

$$\sum_{j=1}^{s}q\alpha_j\frac{d^q}{d\xi^q}v_j(r_\Delta+\xi)\Big|_{\xi=0}\leqslant\frac{d^q}{d\xi^q}(v(x_\Delta+\xi))^q\Big|_{\xi=0}. \tag{4,2,26}$$

Все производные, участвующие в этих соотношениях, неотрицательны. Правую часть оценим с помощью интеграла Коши. Функция $v(r_\Delta+\xi)$ регулярна при $|\xi|<R-r_1$. Считая ξ комплексным и полагая $\delta_1=\frac{R-r_1}{2}$, положим $\sup\limits_{|\xi|=\delta_1}|v(r_\Delta+\xi)|=\rho(r_\Delta)$.

Очевидно, $\rho(r_\Delta)<C(r_1)$, где $C(r_1)$ некоторая положительная функция r_1. Далее,

$$\frac{d^q}{d\xi^q}(v(r_\Delta+\xi))^q\Big|_{\xi=0}=\frac{q!}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=\delta_1}\frac{(v(r_\Delta+\xi))^q}{\xi^{q+1}}d\xi.$$

Отсюда

$$\frac{d^q}{d\xi^q}(v(r_\Delta+\xi))^q\Big|_{\xi=0}\leqslant q!\left(\frac{C_1(r_1)}{\delta_1}\right)^q. \tag{4,2,27}$$

Но $\frac{C(r_1)}{\delta_1}=C_1(r_1)$ — новая функция только от r_1. Учитывая (4,2,26) (в левой части стоят неотрицательные величины),

$$\frac{d^q}{d\xi^q}v_j(r_\Delta+\xi)\Big|_{\xi=0}\leqslant q!\ (C_1(r_1))^q \quad (j=1,\ 2,\dots,\ s). \tag{4,2,28}$$

Таким образом, при всяком достаточно малом $\Delta\in\left(0,\ \frac{r_1}{2}\right)$ радиус сходимости по ξ рядов $v_j(r_\Delta+\xi)$ по ξ не меньше $\frac{1}{l_1(r_1)}$. Но так как $z=r_1$ особая точка, то такой радиус не может быть больше Δ. При достаточно малых Δ получается противоречие, доказывающее лемму 6.

Итак, $f_j(t)$ регулярны в круге $|t| < R$ и, следовательно, по теореме 3.1.2 — в полосе $|It| < R$.

Так как на реальной оси $f_j(t) = \varphi_j(t)\varphi_j(-t)$, где $\varphi_j(t)$ и $\varphi_j(-t)$ — х. ф., то по теореме 4.1.1 $\varphi_j(t)$ и $\varphi_j(-t)$ регулярны в той же полосе. Далее, в равенстве (4,2,1) все участвующие функции регулярны и не имеют нулей в круге $|t| < R$. Равенство имеет место в последовательности точек $t_k \to 0$, а следовательно, и во всем круге $|t| < R$. Теорема 4.2.1 доказана (для случая $R = \infty$ $\varphi(t)$ целая функция без нулей). $\varphi_j(t)$ также целые х. ф. без нулей.

Различные варианты этой теоремы имеются у автора [17], [23], Д. Дюгэ [59], Э. Лукач [71] и Р. Лага [63].

В дальнейшем будут даны применения этой теоремы к проблемам разложения безгранично делимых законов и к выводу теоремы В. П. Скитовича—Г. Дармуа.

Глава пятая

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА РАЗЛОЖЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ. НЕРАЗЛОЖИМЫЕ ЗАКОНЫ

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О РАЗЛОЖЕНИЯХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

Будем называть з. р. $F(x)$, отвечающий случайной величине X, решетчатым, если X принимает только значения $X = am + b$ (такую случайную величину также будем называть решетчатой), где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ целые числа. Докажем простую теорему (см. Д. А. Райков [31]) о том, что решетчатый з. р. $F(x)$ может иметь только решетчатые компоненты Точнее имеет место:

Теорема 5.1.1

Если решетчатая случайная величина $X = am + b$ (с вероятностью 1) разлагается на две независимые компоненты

$$X = X_1 + X_2, \tag{5,1,1}$$

то X_1 принимает только значения $am + c$, а X_2 — значения $am + b - c$, где c — какое-либо число.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ з. р. для X_1 и X_2. Пусть $\xi > x$; $\eta > y$, тогда имеем:

$$(F_1(\xi) - F_1(x))(F_2(\eta) - F_2(y)) \leqslant F(\xi + \eta) - F(x + y). \tag{5,1,2}$$

В самом деле, событие $x + y \leqslant X < \xi + \eta$ следует из событий $\xi \leqslant X_1 < x$, $\eta \leqslant X_2 < y$, при этом случайные величины X_1 и X_2 независимы, что и приводит к (5,1,2).

Пусть теперь x_1 — точка роста X_1; x_2 — точка роста X_2. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ и $x = x_1 - \varepsilon$; $\xi = x_1 + \varepsilon$, $y = x_2 - \varepsilon$; $\eta = x_2 + \varepsilon$ имеем $F_1(\xi) - F_1(x) > 0$; $F_2(\eta) - F_2(y) > 0$, так что согласно (5,1,2) $x_1 + x_2$ будет точкой роста $F(x)$.

Но точки роста $F(x)$ все имеют вид $am + b$. Пусть x_2 фиксированная точка роста $F_2(x)$, а x_1 может быть любой точкой роста $F_1(x)$, тогда имеем: $x_1 = am + b - x_2$ (m должно быть одним из чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Полагая $b - x_2 = c$, получаем утверждение теоремы.

Решетчатость з. р. $F(x)$ приводит к периодичности х. ф. $\left(\text{очевидно, последняя имеет период } \frac{2\pi}{|a|}\right)$. Обратно, если х. ф. $\varphi(t)$ периодическая с периодом $\frac{2\pi}{|a|}$, то, как легко убедиться, з. р. $F(x)$ — решетчатый и $X = am + b$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Случай наличия у з. р. $F(x)$ абсолютно-непрерывной компоненты является как бы противоположным данному (см. Д. Дюгэ [60], стр. 37).

Теорема 5.1.2

Если закон распределения $F(x)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту, то он и сам абсолютно непрерывен.

Пусть $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\,dF_2(y)$, причем з. р. $F_1(x)$ абсолютно непрерывен $F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_1(u)\,du$, где $f_1(u)$ соответствующая плотность вероятности. Тогда

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dF_2(y) \int\limits_{-\infty}^{x-y} f_1(u)\,du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dF_2(y) \int\limits_{-\infty}^{x} f_1(t-y)\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t-y)\,dF_2(y). \tag{5,1,3}$$

Здесь $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t-y)\,dF_2(y)$ есть абсолютно непрерывная функция t, что и доказывает теорему 5.1.2.

Пусть X решетчатая величина, принимающая только значения $am + b$, тогда $Y = \frac{X-b}{a}$ принимает только целочисленные значения. Х. ф. Y имеет вид

$$\varphi_Y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_m e^{itm}, \tag{5,1,4}$$

где $p_m = P(Y = m)$.

Если при этом Y принимает с вероятностью 1 только неотрицательные значения, то, полагая $e^{it} = z$, получим вместо (5,1,4)

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m z^m. \tag{5,1,5}$$

Это — так называемая производящая функция, впервые употреблявшаяся П. Лапласом.

Очевидно, ряд (5,1,5) сходится при $|z|<1$. Далее, если X_1 и X_2 независимые случайные величины, принимающие только неотрицательные целочисленные значения, $g_1(z)$ и $g_2(z)$—соответствующие производящие функции, $X=X_1+X_2$— их сумма, производящую функцию которой обозначим $g(z)$, то

$$g(z)=g_1(z)\,g_2(z). \tag{5,1,6}$$

Заметим еще, что если целочисленная случайная величина X (не обязательно с неотрицательными значениями) разлагается на две независимые компоненты

$$X=X_1+X_2, \tag{5,1,7}$$

то имеет место также разложение вида

$$X=Y_1+Y_2, \tag{5,1,8}$$

где $Y_1=X_1-c$, $Y_2=X_2+c$ — целочисленные случайные величины (c константа). В самом деле, согласно теореме 5.1.1 величина X_1 будет принимать только значения $m+c$, а величина X_2 — значения $m-c$, где $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а c некоторая константа. Это и доказывает требуемое.

§ 2. НЕРАЗЛОЖИМЫЕ ЗАКОНЫ

В § 2 введения мы называли несобственными законы вида $\epsilon(x-a)$ с единственной точкой роста $x=a$ и х. ф. e^{iat}. Мы имеем: $\epsilon(x-a)*\epsilon(x+a)=\epsilon(x)$. Каков бы ни был з. р. $F(x)$, имеем:

$$\begin{aligned} F(x)=F(x)\,\epsilon(x)=(F(x)*\epsilon(x+a))*\epsilon(x-a)= \\ =F(x+a)*\epsilon(x-a). \end{aligned} \tag{5,2,1}$$

Ввиду этого несобственные законы распределения $\epsilon(x-a)$ являются тривиальными компонентами любых з. р. Ввиду этого в „арифметике разложения вероятностных законов“ они играют роль единиц. Говоря о компоненте з. р. $F(x)$, мы будем иметь в виду собственную компоненту (отличную от $\epsilon(x-a)$), если не будет оговорено противное.

Законы распределения $F(x)$, не имеющие компонент, называются *неразложимыми законами распределения*. Они играют роль простых элементов, напоминающих простые элементы теории алгебраических чисел. Соответствующие неразложимым з. р. случайные величины также назовем неразложимыми.

Приведем некоторые примеры неразложимых законов. Пусть случайная величина X принимает только два целочисленных значения m_1 и m_2. Тогда X — неразложима. В самом деле, производящая функция X имеет вид $g(z)=p_1 z^{m_1}+p_2 z^{m_2}$ ($m_2 > m_1$). Если бы X было разложимо, то в силу замечания в конце § 5 имели бы $g(z)=g_1(z)\,g_2(z)$, где

$$g_i(z)=\sum_{k=1}^{n_i} p_{ik} z^{m_{ik}} \quad (i=1,2)$$

имели бы хотя бы по два отличных от 0 числа. Ввиду (5,1,6) мы получили бы равенство

$$p_1 + p_2 z^{m_2 - m_1} = (a_1 + b_1 z^{n_1} + \ldots)(a_2 + b_2 z^{n_2} + \ldots), \quad (5,2,2)$$

где a_i, $b_i > 0$ и остальные члены, если они существуют, также имеют положительные коэффициенты. Но тогда при перемножении скобок в правой части, мы получили бы члены со степенями z: 0; n_1; $n_1 + n_2$ и, может быть, еще какими-либо степенями, что невозможно.

Другим примером является случайная величина X, принимающая значения $0, 1, 2, \ldots, p-1$ с одними и теми же вероятностями $\frac{1}{p}$ (где p — простое число). Именно, имеет место следующая лемма Д. А. Райкова [29].

Лемма

Если p простое число, то полином $g_0(z) = \frac{1-z^p}{1-z}$ не может быть разложен на произведение двух полиномов с неотрицательными коэффициентами, отличных от константы. Доказательство см. в [29]. Указанная выше случайная величина X имеет производящую функцию $\frac{1}{p}(1+z+z^2+\ldots+z^{p-1}) = \frac{g_0(z)}{p}$; в силу замечания в конце § 5, она неразложима.

Приведенные примеры касались решетчатых случайных величин; однако существуют и примеры непрерывно распределенных неразложимых величин. Один из таких примеров приводит Д. Дюгэ [57].

Рассмотрим случайную величину X с х. ф.

$$\varphi(t) = (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (5,2,3)$$

Эта величина непрерывно распределена с плотностью вероятности

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5,2,4)$$

Мы видим, что $g(0) = 0$. Отсюда легко вывести, что X не может иметь нормальной компоненты. Ибо у нормальной компоненты плотность вероятности не исчезает на всей оси и тогда такими же свойствами обладала бы и случайная величина X, и тогда бы $g(0) \neq 0$. Пусть теперь $X = X_1 + X_2$, где X_1 и X_2 независимые собственные компоненты с х. ф. $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Тогда $\varphi(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t)$. Согласно теореме 4.1.13 $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2)$ — целые функции порядка не выше второго; в силу (5,2,3) мы должны иметь: $\varphi_1(t) = e^{a_1 t + a_2 t^2}$, либо $\varphi_1(t) = (1 + t) e^{a_1 t + a_2 t^2}$, либо $\varphi_1(t) = (1 - t) e^{a_1 t + a_2 t^2}$, либо $\varphi_1(t) =$

$=(1-t^2)e^{a_1t+a_2t^2}$ (ибо $\varphi_1(0)=1$). Первый случай невозможен, ибо тогда $\varphi_1(t)$ была бы х. ф. нормального закона; четвертый случай невозможен, ибо в этом случае $\varphi_2(t)$ х. ф. нормального закона, либо $\varphi_2(t)\equiv 1$.

Покажем, что второй и третий случай невозможны. Достаточно ограничиться вторым случаем, ибо для третьего случая $\varphi_2(t)$ будет иметь такую же форму, как $\varphi_1(t)$ во втором случае. Если $\varphi_1(t)=(1+t)e^{a_1t+a_2t^2}$, то в силу свойства эрмитовости имели бы $\varphi_1(-t)=\overline{\varphi_1(t)}$, или

$$(1-t)e^{-a_1t+a_2t^2}=(1+t)e^{\bar{a}_1t+\bar{a}_2t^2};\ \frac{1+t}{1-t}=e^{b_1t+b_2t^2},$$

где b_1 и b_2 — некоторые реальные или комплексные константы.

Это равенство, очевидно, невозможно, что и доказывает неразложимость X.

В данном примере величина X могла принимать сколь угодно большие значения. Интересный пример неразложимой случайной величины, имеющей непрерывную плотность распределения и сосредоточенной на конечном сегменте, был указан в 1952 г. П. Леви (см. [60], стр. 38, 39).

Пусть X_n — случайные величины, равномерно распределенные на сегментах $\left[-\frac{l_n}{2},\ \frac{l_n}{2}\right]$ ($n=0,1,2,\ldots,N$); они имеют х. ф. $\frac{\sin l_n t}{l_n t}$. Пусть еще $0<l_n<1$ и

$$\frac{l_m}{l_n}=\alpha_{mn}\ (m,\ n=0,1,\ldots,N-1;\ m\neq n) \qquad (5,2,5)$$

— иррациональные числа. Введем новые переменные

$$Y_n=X_n+2n\ (n=1,2,\ldots,N)$$

и составим случайную величину Z: „смесь" случайных величин Y_n, взятых с вероятностями $p_0,p_1,\ldots,p_N$. Мы выбираем номер n $0,1,\ldots,N$ с указанными вероятностями и после выбора номера n, условное распределение Z будет такое же, как у Y_n. Х. ф. Z будет иметь вид

$$\varphi_Z(t)=p_0\varphi_0(t)+p_1\varphi_1(t)+\ldots+p_N\varphi_N(t), \qquad (5,2,6)$$

где

$$\varphi_n(t)=e^{2int}\frac{\sin l_n t}{l_n t}. \qquad (5,2,7)$$

При этом вероятности $p_0,p_1,\ldots,p_N$ будем считать выбранными так, чтобы х. ф. $p_0+p_1e^{2it}+\ldots+p_Ne^{2iNt}$ отвечала неразложимой целочисленной случайной величине, можно, например, взять $p_i=\frac{1}{N+1}$ ($i=0,1,\ldots,N$); $N=p-1$, где p — простое число (см. лемму Д. А. Райкова в начале этого параграфа).

Пусть $Z = X + Y$ (X, Y — независимы). При замене $X \to X - c$; $Y \to Y + c$ можно считать, что X и Y принимают значение 0. Возможные значения X и Y содержатся среди возможных значений Z. Положим $X = x + \xi_x$; $Y = y + \eta_y$; $Z = z + \zeta_z$, где x, y, z — соответственно целые числа, ближайшие к X, Y, Z, а ξ_x, η_y, ζ_z — оставшиеся дроби. Если $z = n$, то $\zeta_z = \zeta_n$ равномерно распределено в $\left[-\frac{l_n}{2}, \frac{l_n}{2}\right]$. Очевидно, пара (x, ξ_x) независима от пары (y, η_y). Далее, можно утверждать, что

$$z = x + y, \ \zeta_z = \xi_x + \eta_y.$$

Ибо $z + \zeta_z = x + y + \xi_x + \eta_y$. Если x, y, z, ξ_x, η_y, ζ_z приняли данные значения, то $x + y - z = \zeta_z - \xi_x - \eta_y$.

Слева имеем четное число, а $|\zeta_z - \xi_x - \eta_y| < \frac{3}{2}$, так что $x + y - z = \zeta_z - \xi_x - \eta_y = 0$. Итак, при любых значениях x, y $x + y = z$ и при этом

$$\zeta_z = \xi_x + \eta_y \tag{5,2,8}$$

сумма двух независимых случайных величин. Их х. ф. будут соответственно

$$\varphi_{\frac{z}{2}}(t); \ \varphi_{\frac{x}{2}}(t); \ \varphi_{\frac{y}{2}}(t). \tag{5,2,9}$$

Далее, из $x + y = z$ видим, что случайная величина z имеет компоненты x и y. Но х. ф. z есть

$$p_0 + p_1 e^{2it} + \ldots + p_N e^{2iNt} \tag{5,2,10}$$

и по построению, она неразложима. Стало быть, x (либо y) есть несобственная случайная величина, принимающая значение 0 с вероятностью 1. Пусть x — такая величина. Тогда $X = \xi_0$.

Из (5,2,8) видим, что при любых значениях z $(0, 2, \ldots, 2N)$ имеем:

$$\zeta_z = \xi_0 + \eta_z, \tag{5,2,11}$$

где ξ_0 и η_z — независимы. Стало быть, при $n = 0, 1, 2, \ldots, N$

$$\varphi_n(t)' = f_0(t)\, h_n(t) \ (n = 0, 1, 2, \ldots, N), \tag{5,2,12}$$

где $f_0(t)$ х. ф. ξ_0, а $h_n(t)$ х. ф. η_n. При этом $\varphi_n(t) = \frac{\sin l_n t}{l_n t}$. По теореме 4.1.3. $f_0(t)$ должна быть, как и $\varphi_n(t)$ целой функцией экспонентного типа. Далее, $f_0(t)$ не имеет нулей, ибо при разных n функции $\varphi_n(t)$ не имеют общих нулей. Действительно, $\varphi_n(t)$ имеет нули только в точках $\frac{k\pi}{l_n}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, и отношения чисел $\frac{l_m}{l_n}$ иррациональны. Не имея нулей и будучи экспонентного типа согласно теореме 1.8.2 $f_0(t)$ должна быть вида e^{at}, причем, очевидно, $a+bi$ должно быть чисто мнимым. Но тогда ξ_0 и вместе с тем X — несобственная случайная величина, что недопустимо. Этим построение примера заканчивается.

§ 3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. РОЛЬ НЕРАЗЛОЖИМЫХ ЗАКОНОВ

Как было видно из сказанного во введении, сложение случайных величин (и отвечающая им композиция з. р. и умножение х. ф.) приводит к образованию ассоциативной системы с одним действием.

В предыдущем параграфе было выяснено, что в этой системе имеются неразложимые (простые) элементы. Имеются и единицы, роль которых играют несобственные з. р. $\mathfrak{E}(x-a)$ („абсолютной" единицей служит $\mathfrak{E}(x)$, а единицами, как элементами, имеющими обратные, служат $\mathfrak{E}(x-a)$ при всех a).

Однако, вообще обратные элементы отсутствуют. Более того, нет правила сокращения, т. е., вообще говоря, из

$$F_1 * F_2 = F_1 * F_3 \tag{5,3,1}$$

не следует, что $F_2 = F_3$, т. е. из $X_1 + X_2 = X_1 + X_3$ (слагаемые независимы) не следует, вообще говоря, что $X_2 = X_3$.

Первый пример такого типа был построен Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчиным [4]. Воспроизведем его.

Пусть з. р. $F_1(x)$ имеет х. ф. $\varphi_1(t)$, которая равна $1-|t|$ при $|t| \leqslant 1$ и 0 при $|t|>1$. То, что такая функция есть х. ф., следует, например, из теоремы 2.1.3 (теоремы Г. Пойа). Это видно и из формулы

$$\varphi_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cos tx\,dx. \tag{5,3,2}$$

Пусть $\varphi_2(t)$ совпадает с $\varphi_1(t)$ при $|t| \leqslant 1$ и далее продолжается периодически с периодом 2. Тогда для $\varphi_2(t)$ имеем ряд Фурье

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} \cos(2n+1)\pi t. \tag{5,3,3}$$

Это показывает, что $\varphi_2(t)$ есть х. ф. для некоторого з. р. $F_2(x)$.

Очевидно, имеем для всех t

$$\varphi_1(t)\,\varphi_2(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_1(t)$$

или

$$F_1 * F_2 = F_1 * F_1. \tag{5,3,4}$$

При этом $F_1 \neq F_2$, что и дает требуемый пример.

С таким аномальным поведением композиции связано также аномальное поведение неразложимых „простых“ компонент, именно отсутствие однозначности разложения на неразложимые компоненты. Первый пример такого ряда построил П. Леви.

Пусть X_1 принимает значения 0; 1; 2, каждое с вероятностью $\frac{1}{3}$; X_2 — значения 0; 3, каждое с вероятностью $\frac{1}{2}$; Y_1 — значение 0; 1, каждое с вероятностью $\frac{1}{2}$; Y_2 — значения 0; 2; 4, каждое с вероятностью $\frac{1}{3}$. Если F_1, F_2, Φ_1, Φ_2 соответствующие з. р., то легко обнаружить, что

$$F_1 \ast F_2 = \Phi_1 \ast \Phi_2. \tag{5,3,5}$$

Однако, все четыре з. р., входящие в (5,3,5), неразложимы. Для F_1 и Φ_1 это следует из первого примера неразложимости в § 2, а для F_2 и Φ_2 — хотя бы из изложенной там же леммы Д. А. Райкова (или может быть проверено непосредственно). Итак, имеем два совершенно различные разложения на неразложимые множители.

Ситуация сходна с положением, существовавшим в алгебраической теории чисел до изобретения теории идеалов, но здесь введение идеалов (или идеальных законов распределения) было бы весьма затруднительным из-за трудности присоединения второй операции для построения кольца и отсутствия правила сокращения.

Воспроизведем еще интересный пример П. Леви [60], касающийся разложений случайной величины X, равномерно распределенной в сегменте [0,1]. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ набор натуральных чисел, бо́льших 1. Тогда для всякого значения X имеем:

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \quad (X_n = 0,1,2,\ldots \text{ или } a_n - 1) \tag{5,3,6}$$

(ряд Г. Кантора), см. [77]. Если X_n выбирать случайно с вероятностью $\frac{1}{a_n}$, и все $X_n\,(n = 1,2,\ldots)$ независимы, то X будет равномерно распределен на сегменте [0,1].* Положим

$$Y_1 = \frac{X_1}{a_1}\ ;\ \ Y_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{X_n}{a_1 \ldots a_n},$$

тогда Y_1 и Y_2 независимы и $X = Y_1 + Y_2$. Если a_1 простое число, то, как мы видим в § 2 этой главы (лемма Д. А. Райкова), Y_1 является неразложимой случайной величиной. Так

* Сходимость можно понимать в смысле слабой сходимости композиции соответствующих з. р.

как простых чисел a_1 бесконечно много, то равномерно распределенная величина X имеет бесконечно много неразложимых компонент Y_1.

Другие интересные примеры можно найти у Д. Дюгэ [57] и у Р. А. Фишера и Д. Дюгэ [61].

Один из них касается целочисленных случайных величин. Рассмотрим полином

$$g(t)=1+2t-t^2+3t^3+4t^4. \tag{5,3,7}$$

Имеем:

$$g^2(t)=1+4t+2t^2+2t^3+19t^4+6t^5+3t^6+18t^7+9t^8,$$

$$g^3(t)=1+6t+9t^2+5t^3+36t^4+60t^5+8t^6+81t^7+117t^8+$$
$$+27t^9+54t^{10}+81t^{11}+27t^{12}.$$

Таким образом, коэффициенты у $g^2(t)$ и $g^3(t)$ — положительны.

Далее, всякое целое число $n>3$ можно представить в виде $n=2p+3q;\, p,\, q\geqslant 0$. Ибо всякое целое число $n>3$ имеет вид $3q$, либо $3q+2$, либо $3q+4$ $(q\geqslant 0)$. Поэтому из последних формул следует, что $(g(t))^n$ имеет все коэффициенты положительными при $n\geqslant 2$. Теперь рассмотрим функцию

$$f_\alpha(t)=\exp\alpha(g(t)-1)=e^{-\alpha}\exp(\alpha g(t))$$

при $\alpha>0$. Так как $f_\alpha(t)=e^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha g(t))^n}{n!}$, то ясно, что все коэффициенты при степенях $t^m\,(m>2)$ и коэффициенты при t^0 и t^1 у нашего ряда положительны; коэффициент же при t^2 может и не быть положительным. Этот коэффициент, очевидно, равен

$$\frac{1}{2}e^{-\alpha}(\alpha g''(0)+(\alpha g'(0))^2)=\frac{e^{-\alpha}}{2}(-2\alpha+4\alpha^2).$$

Это выражение неотрицательно только при $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$.

Положим $t=e^{iu}$; $f_\alpha(t)=f_\alpha(e^{iu})=\varphi_\alpha(u)$. Тогда $\varphi_\alpha(u)=$ $=(\varphi_1(u))^\alpha$ (при подходящем определении логарифма). При этом $\varphi_\alpha(u)$ будет х. ф. тогда и только тогда, когда $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$. Между тем, при всех $\alpha>0$ $\varphi_\alpha(u)=(\varphi_1(u))^\alpha$ будет хребтовой функцией (см. § 2, гл. 3).

Другой пример Р. А. Фишера и Д. Дюгэ [61] касается случая, когда з. р. F не имеет гауссовой компоненты, а закон $F\ast F$ имеет ее.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}}(a\cos 2t+b\cos t-c)\quad a,\ b,\ c>0). \tag{5,3,8}$$

Если α, a, b, c выбраны так, что

$$ae^{-2\alpha^2}+be^{-\frac{\alpha^2}{2}}-c=0, \qquad (5,3,9)$$

то $\varphi(t)$ будет х. ф., и притом не имеющей гауссовой компоненты, так как ее соответствующая плотность вероятности $g(x)$ равна 0 при $x=0$. Композиция соответствующего з. р. F с самим собой $F*F$ имеет тогда х. ф.

$$\varphi^2(t)=e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}\left(\frac{a^2}{2}\cos 4t+ab\cos 3t+\frac{b^2-4ac}{2}\cos 2t+\right.$$
$$\left.+b(a-2c)\cos t+\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+c^2\right). \qquad (5,3,10)$$

Если $b^2-4ac>0$, $a>2c$ (что оказывается совместным с (5,3,9)), то в скобках в (5,3,10) имеем х. ф., и, стало быть, $F*F$ имеет гауссову компоненту с х. ф. $e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$.

§ 4. ТЕОРЕМЫ А. Я. ХИНЧИНА О РАЗЛОЖЕНИЯХ

Переходя к общим теоремам А. Я. Хинчина [43] о разложениях з. р., докажем сперва некоторые вспомогательные теоремы.

Пусть F_1 компонента з. р. F. Тогда при всяком a, F_1* $*\mathfrak{E}(x-a)$ также будет компонентой, которую можно назвать *эквивалентной* F_1 компонентой. Эквивалентные компоненты образуют классы; каждую компоненту из класса будем называть *представителем класса*.

Теорема 5.4.1

Множество компонент F_i закона распределения F компактно в смысле слабой сходимости и в том смысле, что по всякой последовательности компонент $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ можно построить последовательность эквивалентных им представителей $F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \ldots, F_n^{(1)}, \ldots$, из которой можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой компоненте.

Согласно теореме 0.2.1 надлежит обеспечить условие, состоящее в том, чтобы

$$F_n^{(1)}(-x)\to 0 \text{ и } F_n^{(1)}(x)\to 1 \text{ при } x\to\infty$$

равномерно по n. Это следует из поведения функции концентрации компонент $F_n(x)$ по сравнению с исходным законом $F(x)$ [см. (0,2,4), лемма П. Леви в § 2 введения]. Докажем требуемую равномерность по n соотношений

$$F_n^{(1)}(-x)\to 0;\ F_n^{(1)}(x)\to 1 \text{ при } x\to\infty \qquad (5,4,1)$$

для подходящих представителей классов компонент. Рассмотрим, например, второе соотношение. Если оно выполняется неравномерно по n, то существует $\varepsilon > 0$ и бесконечная последовательность $n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots$ такая, что

$$F^{(1)}_{n_m}(\xi) > 1 - \varepsilon, \tag{5,4,2}$$

сколь бы велико ни было ξ, выбранное заранее, и как бы ни выбрать заранее систему представителей $F^{(1)}_n$. Это значит, что как ни выбрать заранее сколь угодно большое число l,

$$Q_{n_m}(l) < 1 - \varepsilon, \tag{5,4,3}$$

где $Q_n(l)$ — концентрация компоненты F_{n_m}. Но тогда, по лемме П. Леви (см. (0,2,4)), $Q(l) < 1 - \varepsilon$, сколь большим ни взять l, если $Q(l)$ концентрация з. р. $F(x)$. Это, очевидно, невозможно.

Таким образом, равномерность выполнения соотношений (5,4,1) доказана, а тогда по теореме 0.2.1 обосновываем компактность $\{F^{(1)}_n(x)\}$.

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему.

Теорема 5.4.2 (А. Я. Хинчина)

Закон распределения, не имеющий неразложимых компонент, безгранично делим.

Как известно, (см. [6] и [44]), класс безгранично делимых з. р. есть класс предельных законов для з. р. $F_n(x)$, которые являются з. р. сумм

$$s_k = x_{k1} + x_{k2} + \ldots + x_{kn_k} \tag{5,4,4}$$

при $k \to \infty$ и при условии предельной пренебрегаемости (равномерной бесконечной малости x_{kl}). Условие предельной пренебрегаемости выражается в виде

$$P\{|x_{ki}| > \varepsilon\} \to 0 \tag{5,4,5}$$

равномерно по i при $k \to \infty$.

Пусть з. р. $F(x)$ не имеет неразложимых компонент. Рассмотрим какое-либо разложение

$$F = F_1 * F_2 * \ldots * F_n \tag{5,4,6}$$

и разложение соответствующих х. ф.

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\ldots\varphi_n(t). \tag{5,4,7}$$

Имея в виду применение функционала А. Я. Хинчина (2,3,1), рассмотрим сегмент $[0, a]$ $(a > 0)$, где $\varphi(t) \neq 0$.

В дальнейшем под словом „компонента“ будем понимать собственную компоненту. Рассмотрим функционалы А. Я. Хинчина $N_a(\varphi_j)$ для (5,4,7). Покажем, что у всякой компоненты

F_j имеется компонента F_{jk} с х. ф. φ_{jk} такая, что $N_a(\varphi_{jk})$ сколь угодно мало. Рассмотрим точную нижнюю грань для $N_a(\varphi_{jk})$. Если она равна 0, то найдутся компоненты F_{jk} со сколь угодно малыми $N_a(\varphi_{jk})$. Если она больше 0, то рассмотрим последовательность разложений $F_j = F_{j1} * F_{j2}$ и в силу доказанной выше компактности множества представителей компонент (теорема 5.4.1) найдем разложение, где $N_a(\varphi_{j1})$ достигает нижней грани. При этом F_{j1} — собственная компонента, ибо $N_a(\varphi_{j1}) > 0$.

Однако F_{j1} разложима, и в силу (2,3,2) для ее компонент функционалы А. Я. Хинчина будут еще меньше, что невозможно. Итак, нижняя грань равна 0, и наше утверждение доказано.

Теперь докажем, что при всяком n, среди разложений (5,4,6) найдутся такие, для которых $N_{01}(\varphi_j)$ одинаковы ($j = 1,2,\ldots, n$).

Будем считать в разложениях (5,4,6) компоненты F_j, расположенными так, что $N_a(\varphi_1) \leqslant N_a(\varphi_2) \leqslant \ldots \leqslant N_a(\varphi_n)$.

Пусть μ_n верхняя грань $N_a(\varphi_1)$ по всем разложениям (5,4,6) с данным n. По теореме 5.4.1, можем найти разложение вида (5,4,6), где эта грань достигается. Докажем, что у такого разложения $N_a(\varphi_j)$ совпадают. Пусть это не так, и пусть

$$N_a(\varphi_1) = N_a(\varphi_2) = \ldots = N_a(\varphi_l) < N_a(\varphi_{l+1}) \leqslant \ldots \leqslant N_a(\varphi_n). \quad (5,4,8)$$

Имеем: $N_a(\varphi_n) > 0$, иначе F — несобственный з. р. Согласно сказанному выше, существуют компоненты F_n с х. ф. $\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \ldots, \varphi_{nl}$ со сколь угодно малыми $N_a(\varphi_{n1}), \ldots, N_a(\varphi_{nl})$, из которых ни одно не равно 0. Пусть $\varphi_n = \varphi_{n1} \ldots \varphi_{nl}\varphi_n^{(0)}$. Рассмотрим разложение (5,4,7), отвечающее разложению х. ф.

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_{n1}(t))(\varphi_2(t)\varphi_{n2}(t))\ldots \\ \ldots(\varphi_l(t)\varphi_{nl}(t))\varphi_{l+1}(t)\ldots\varphi_{n-1}(t)\varphi_{n}^{(0)}(t). \end{aligned} \quad (5,4,9)$$

При достаточно малых $N_a(\varphi_{nl}), \ldots, N_a(\varphi_{ni})$ минимальное значение функционала А. Я. Хинчина (5,4,9) повысится, что невозможно. Итак, в (5,4,8) знаков неравенства нет, ч. т. д.

Рассмотрим теперь последовательность разложений (5,4,7) с совпадающими значениями $N_a(\varphi_j)$. Очевидно,

$$N_a(\varphi_j) = \frac{N_a(\varphi)}{n}. \quad (5,4,10)$$

Ввиду этого в таких разложениях $N_a(\varphi_j) \to 0$ при $n \to \infty$ ($j = 1,2,\ldots, n$). По теореме 2.3.1 это будет отвечать серии разложений

$$X = X_{n_1} + X_{n_2} + \ldots + X_{n_n}, \quad (5,4,11)$$

где концентрация в любом сегменте стремится к 0 и притом равномерно по второму индексу в (5,4,11) (как это непосредственно видно из доказательства теоремы 2.3.1 ввиду совпадения значений функционалов А. Я. Хинчина у всех слагаемых при заданном n). Полагая $X_{ni}=x_{ni}+a_{ni}$, где a_{ni} соответствующие сдвиги ($i=1,2,\ldots,n$), добьемся для x_{ni} выполнения условия (5,4,5). Полагая еще $a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{nn}=A_n$, получим

$$X=x_{n1}+\ldots+x_{nn}+A_n.$$

Разбивая константу A_n на $m=m(n)$ слагаемых, по модулю меньших ε, $A_n=ma_n$, $|a_n|<\varepsilon$, найдем

$$X=x_{n1}+\ldots+x_{nn}+a_n+\ldots+a_n, \tag{5,4,12}$$

где последние слагаемые повторяются $m=m(n)$ раз. Это отвечает схеме серий (5,4,4) и доказывает, что X б. д. з., т. е. теорему 5.4.2.

Данная теорема имеет интересное следствие, которое мы сформулируем в виде отдельной теоремы.

Теорема 5.4.3

Если характеристическая функция закона распределения $F(x)$ имеет где-либо нуль на реальной оси, то закон распределения $F(x)$ имеет неразложимые компоненты.

Для доказательства заметим, что при отсутствии неразложимых компонент по теореме 5.4.2 з. р. $F(x)$ безгранично делим, и потому его х. ф. не обращается в нуль.

Надо, однако, отметить, что существуют з. р, х. ф. которых не обращаются в нуль и которые не безгранично делимы, так что имеют неразложимые компоненты. Соответствующие примеры мы увидим в дальнейшем.

Перейдем теперь к теореме А. Я. Хинчина [43].

Теорема 5.4.4 (А. Я. Хинчина)

Всякая случайная величина есть сумма безгранично делимой и неразложимых величин в конечном или счетном числе. Точнее, всякая характеристическая функция $f(t)$ представима в виде

$$f(t)=\prod_{i=1}^{\infty}p_i(t)\,u(t), \tag{5,4,13}$$

где $p_i(t)$ — характеристические функции неразложимых, а $u(t)$ — безгранично делимого закона (произведение $\prod_{i=1}^{\infty}p_i(t)$ может быть и конечным).

Пусть F з. р. с х. ф. $f(t)$ и $f(t) \neq 0$ при $|t| \leqslant a$, $a > 0$. Пусть $N_a(f) = \alpha > 0$. Если F не имеет неразложимых компонент, то все доказано, если это не так, то е́сть компонента. Рассмотрим разложение вида $F = P_1 * F_1$, где P_1 неразложима. Если в F_1 есть неразложимые компоненты P_i с х. ф. p_i, где $N_a(p_i) > \frac{\alpha}{2}$, то их может быть не больше двух в силу свойств функционала А. Я. Хинчина $N_a(p_i)$.

Выпишем вообще разложения такие, что при $k = k(s)$

$$F = P_1 * P_2 * \ldots * P_k * F_k, \tag{5,4,14}$$

где F_s не имеет неразложимых компонент P_r с х. ф. p_r и $N_a(p_r) > \frac{\alpha}{2^s}$. Если такой процесс обрывается и при некотором k F_k не имеет неразложимых компонент, то все доказано. Если это не так, можно продолжать ряд (5,4,14) неограниченно. Разложению (5,4,14) отвечает разложение х. ф.

$$f(t) = p_1(t) p_2(t) \ldots p_k(t) f_k(t). \tag{5,4,15}$$

Так как $N_a(f) \geqslant \sum_{i=1}^{k} N_a(p_i)$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} N_a(p_i)$ сходится. Стало быть, $\sum_{i=n+1}^{n+m} N_a(p_i) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по m.

В силу теоремы 2.3.1 для пар натуральных чисел b и $b' > b$ существует реальная константа $\gamma_{b,b'}$ под условием

$$\exp(it\gamma_{b,b'}) \sum_{k=b}^{b'} p_k(t) \to 1 \text{ при } b \to \infty \tag{5,4,16}$$

равномерно по $|t| \leqslant T$, $b' > b$ (см. замечание по поводу равномерности сходимости в (2,3,4), сделанное в доказательстве предыдущей теоремы).

Положим $p_k(t) = \rho_k(t) e^{i\omega_k(t)}$, $\omega_k(0) = 0$. В силу (5,4,16) имеем при $b \to \infty$, $|t| \leqslant T$:

$$t\gamma_{b,b'} + \sum_{k=b}^{b'} \omega_k(t) = 2\pi l_{b,b'}(t) + o(1), \tag{5,4,17}$$

где $l_{b,b'}(t)$ — целое число. Так как слева стоит непрерывная функция и $l_{b,b'}(0) = 0$, то $l_{b,b'}(t) = 0$ при $|t| \leqslant a$ и достаточно большом b. Имеем из (5,4,17):

$$t\gamma_{b,b'} + \sum_{k=b}^{b'} \omega_k(t) = o(1).$$

За счет соответствующих сдвигов можем считать $\omega_k(1)=0$, и тогда $t\gamma_{b,b'}=o(1)$ и

$$\prod_b^{b'} p_k(t)\to 1$$

при $b\to\infty$, равномерно при $|t|\leqslant T$, $b'>b$.

Таким образом, $\prod_{k=1}^{\infty}(p_k(t)$ сходится к х. ф., которую мы обозначим $v(t)$, с з. р. $V(x)$. Далее имеем:

$$f_k(t)=f_{k+m}(t)\prod_{i=m+1}^{m+k} p_i(t),$$

в силу сказанного ранее отсюда следует сходимость $f_k(t)$ при $n\to\infty$ к х. ф. $u(t)$ с з. р. $U(x)$ и

$$f(t)=v(t)\,u(t);\ F=V*U.$$

V не может иметь неразложимых компонент, ибо иначе из (5,4,15) следовало бы, что при любом k, F_k имело бы их, не для неразложимых компонент P_i з. р. F_k, где $k=k(s)$, $N_a(p_i)\leqslant\frac{a}{2^s}$, что невозможно. Таким образом, теорема 5.4.4 доказана.

Как было показано выше на примерах, разложение (5,4.13), вообще говоря, неоднозначно.

Глава шестая

ПРОСТЕЙШИЕ ТЕОРЕМЫ О РАЗЛОЖЕНИЯХ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

В настоящей главе после рассмотрения некоторых вопросов типа единственности представления х. ф. б. д. з. формулой типа Леви — Хинчина и различных примеров б. д. з., имеющих неразложимые компоненты, будут доказаны теоремы Г. Крамера о разложении нормального закона и Д. А. Райкова о разложении закона Пуассона. Теорема Г. Крамера получит некоторое аналитическое обобщение, из которого будет следовать теорема В. П. Скитовича — Г. Дармуа. Последняя теорема имеет приложение для нового вывода закона Максвелла о распределении скоростей молекул и закона Шварцшильда о распределении скоростей звезд.

§ 1. О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ФОРМУЛОЙ ТИПА ЛЕВИ—ХИНЧИНА

Мы пользовались уже формулой П. Леви — А. Я. Хинчина в § 2 введения и в § 4, гл. 3. Если $\varphi(t)$ — х. ф. б. д. з., то значение $\ln\varphi(t)$ такое, что $\ln\varphi(0)=0$ задается формулой:

$$\ln\varphi(t)=\beta it-\gamma t^2+\int_{-\infty}^{0}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dM(u)+$$

$$+\int_{0}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dN(u), \tag{6,1,1}$$

где $M(u)$ и $N(u)$ удовлетворяют соотношениям:

1°. $M(u)$ — неубывающая в $(-\infty, 0)$ — неубывающая в $(0, \infty)$.

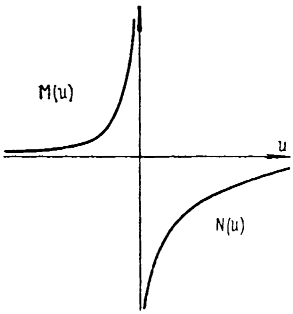
2°. $M(-\infty)=N(\infty)=0$.

3°. $\int_{-a}^{0}u^2\,dM(u)+\int_{0}^{a}u^2dN(u)<\infty$ для любого конечного $a>0$.

Обратно, всякая такая пара $M(u)$, $N(u)$ и числа $\gamma \geqslant 0$ и β определяют б. д. з.

Заметим, что при $u=0$, $M(u)$ и $N(u)$ не определяются и $\int\limits_0^a u^2 dN(u)$ понимается как $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^a u^2 dN(u)$, аналогичное положение и у $\int\limits_{-a}^0 u^2 dM(u)$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{0} u^2\, dM(u) + \int\limits_0^\varepsilon u^2\, dN(u) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \qquad (6,1,2)$$



Если в формуле (6,1,1) $\gamma > 0$, будем говорить, что данный б. д. з. имеет гауссову компоненту.

Возможное поведение функций $M(u)$ и $N(u)$ представлено на рисунке.

Функции $M(u)$ и $N(u)$ будем называть *спектральными* функциями, или *пуассоновым спектром* данного безгранично делимого закона. $M(u)$ будем называть *спектром отрицательных пуассоновых частот,* а $N(u)$ — *спектром положительных пуассоновых частот.*

Для такого определения существенна однозначность $M(u)$ и $N(u)$ в формуле (6, 1, 1). Мы докажем такую однозначность и даже несколько более сильную теорему, следуя рассуждениям М. Лев [68]. Рассмотрим з. р. с х. ф. $\varphi(t)$ — такой, что $\ln\varphi(t)$ ($\ln\varphi(0)=0$) при всех t представляется формулой вида (6, 1, 1), где $M(u)$ и $N(u)$ суть функции ограниченной вариации и, следовательно, являются разностями двух неубывающих функций

$$M(u) = M_1(u) - M_2(u);\ N(u) = N_1(u) - N_2(u) \qquad (6,1,3)$$

соответственно в $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

Теорема 6.1.1

Пусть в предыдущих обозначениях для некоторого закона распределения имеет место формула (6,1,1)*, причем* $M(-\infty) = N(\infty) = 0$ и $\int\limits_{-a}^{0} u^2\, dM_i(u) + \int\limits_0^a u^2\, dN_i(u) < \infty$. *Тогда представление* (6,1,1) *единственно.*

Покажем сперва, что число γ единственно и определяется формулой

$$-\gamma = \lim_{\gamma\to\infty} \frac{\ln\varphi(t) + \ln\varphi(-t)}{2t^2}. \qquad (6,1,4)$$

В самом деле, имеем:

$$\ln\varphi(t)+\ln\varphi(-t)=-2\gamma t^2+2\int_{-\infty}^{0}(\cos tu-1)\,dM(u)+$$
$$+2\int_{0}^{\infty}(\cos tu-1)\,dN(u). \qquad (6,1,5)$$

Рассмотрим последний член в правой части и покажем, что при $t\to\infty$ он имеет порядок $O(t^2)$. Имеем: $(i=1,2)$

$$\int_0^\infty(1-\cos tu)\,dN_i(u)=\int_0^1(1-\cos tu)\,dN_i(u)+O(1). \qquad (6,1,6)$$

Далее, возьмем малое $\varepsilon>0$. Имеем:

$$\int_\varepsilon^1(1-\cos tu)\,dN_i(u)=\int_\varepsilon^1\frac{1-\cos tu}{u^2}\,u^2dN_i(u)<$$
$$<\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\varepsilon^1 u^2dN_i(u)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \qquad (6,1,7)$$

Кроме того

$$\int_0^\varepsilon(1-\cos tu)\,dN_i(u)=\int_0^\varepsilon\frac{1-\cos tu}{u^2}\,u^2dN_i(u)=$$
$$=\int_0^\varepsilon\frac{\sin^2\frac{tu}{2}}{u^2}\,u^2dN_i(u)=t^2o(1) \qquad (6,1,8)$$

при $\varepsilon\to0$, ибо $\int_0^\varepsilon u^2dN_i(u)\to0$ в силу условий теоремы. Выберем $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{t}}$. Тогда при $t\to\infty$ из (6,1,6), (6,1,7) и (6,1,8) находим

$$\int_0^\infty(1-\cos tu)\,dN_i(u)=o(t^2). \qquad (6,1,9)$$

Такой же результат получается для $M_i(u)$ $(i=1,2)$. Это доказывает (6,1,4).

Пусть теперь h — какое-либо реальное число; составим

$$\ln\varphi(t)-\frac{1}{2}[\ln\varphi(t-h)+\ln\varphi(t+h)]=\gamma h^2+$$
$$+\int_{-\infty}^0 e^{itu}(1-\cos hu)\,dM(u)+\int_0^\infty e^{itu}(1-\cos hu)\,dN(u)=$$
$$=\gamma h^2+\int_{-\infty}^\infty e^{itu}(1-\cos hu)\,dH(u), \qquad (6,1,10)$$

где $H(u)$ функция ограниченной вариации, совпадающая с $M(u)$ в $(-\infty, 0)$ и с $N(u)$ в $(0, \infty)$.

Функция

$$H_1(u) = \int_{-\infty}^{u} (1 - \cos hv)\, dH(v) \qquad (6,1,11)$$

связана с $\ln \varphi(t) - \frac{1}{2}[\ln \varphi(t-h) + \ln \varphi(t+h)] - \gamma h^2$ преобразованием Фурье—Стилтьеса и потому определяется (как обычно, в точках непрерывности) с точностью до константы. То же касается и функции $H(v)$ во всех ее точках непрерывности, где $1 - \cos hv \neq 0$, т. е. при $v \neq \frac{2k+1}{2}\frac{\pi}{h}$ (k — целое).

Заменяя h на $h\sqrt{2}$, получим определение $H(v)$ во всех ее точках непрерывности, неравных $\frac{2k+1}{2}\frac{\pi}{h\sqrt{2}}$ (k — целое). Два ряда этих точек не пересекаются, ибо $\sqrt{2}$ — иррациональное число.

Это доказывает теорему 6.1.1, так как величина β, разумеется, теперь находится однозначно и $H(\infty) = 0$.

Отсюда, между прочим, следует, что х. ф. (3,2,11) не является х. ф. б. д. з., ибо в представлении (3,2,11) имеется член $-\nu(e^{\frac{it}{q}} - 1)$, $-\nu < 0$. Если бы $f_1(t)$ отвечала б. д. з., она должна была бы также иметь представление вида (6,1,1), что невозможно по теореме 6.1.1.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О РАЗЛОЖЕНИИ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ

Формула Леви — Хинчина (6,1,1) позволяет указать все разложения б. д. з. на безгранично делимые компоненты. Обозначим через I класс всех безгранично делимых законов. Возьмем один из них F и составим формулу (6,1,1). Пусть

$$\beta = \beta_1 + \beta_2;\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2;\ \gamma_1 \geqslant 0;\ \gamma_2 \geqslant 0, \qquad (6,2,1)$$

$$M(u) = M_1(u) + M_2(u);\ N(u) = N_1(u) + N_2(u), \qquad (6,2,2)$$

где функции $M_i(u)$ — неубывающие функции в $(-\infty, 0)$, а $N_i(u)$ — неубывающие функции в $(0, \infty)$, $(i = 1,2)$. Далее, пусть $M_1(-\infty) = M_2(-\infty) = N_1(\infty) = N_2(\infty) = 0$. Условие 3° § 1 этой главы будет выполняться автоматически, и пары функций $M_i(u)$, $N_i(u)$ совместно с числами β_i, γ_i будут определять безгранично делимые компоненты F_i з. р. F; так что $F = F_1 * F_2$.

Если F — собственный з. р., так что (6,1,1) не сводится к формуле $\ln \varphi(t) = \beta it$, то таких компонент бесконечно много, если и не учитывать несобственные компоненты $\epsilon(x - \beta_i)$.

Таким образом, задача описания разложений б. д. з. на безгранично делимые компоненты сводится к задаче о разложении монотонных функций на монотонные компоненты.

Если бы все б. д. з. имели бы только безгранично делимые (б. д.) компоненты, то теория разложения этих законов была бы сравнительно проста. Однако, как мы увидим, это не так; вообще говоря, б. д. з. имеют и не б. д., и, следовательно, по теореме 5.4.4 и неразложимые компоненты. Случаи, когда б. д. з. имеют только б. д. компоненты, как мы увидим далее, сравнительно редки.

Приведем несколько примеров б. д. з., имеющих неразложимые компоненты.

Пример А. Я. Хинчина [44]. Пусть $0 < a < 1$; функция

$$\varphi(t) = \frac{1-a}{1-ae^{it}} = \exp(\ln(1-a) - \ln(1-ae^{it})) =$$

$$= \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n}(e^{int}-1)\right)$$

есть х. ф. б. д. з. (наглядно видно ее образование из законов Пауссона). С другой стороны, при $|x| < 1$ имеем формулу

$$\frac{1}{1-x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})\ldots(1+x^{2^4})\ldots$$

Ввиду чего

$$\varphi(t) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1+a^{2^k}e^{2^k it}}{1+a^{2^k}}.$$

При этом $\frac{1+a^{2^k}e^{2^k it}}{1+a^{2^k}}$ есть х. ф. целочисленной случайной величины, принимающей значения 0 и 2 и поэтому неразложимой (см. § 2, гл. 5. Таким образом, указанный б. д. з. разлагается на композицию счетного множества неразложимых компонент.

Пример Д. А. Райкова. Пусть $p > 0$, $q > 0$, $p+q=1$. Имеем, разлагая в ряд Фурье функцию $\ln(p+qe^{it})$, $\ln(p+qe^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{int}$; при $t=0$ имеем: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n = 0$, так что $b_0 = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' b_n$ (штрих означает выпуск b_0). Отсюда

$$\ln(p+qe^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' b_n(e^{int}-1). \tag{6,2,3}$$

Ряд (6,2,3) сходится абсолютно. Он имеет как положительные, так и отрицательные коэффициенты.

Пусть $b'_n = b_n$, если $b_n \geqslant 0$ и $b'_n = 0$ при $b'_n < 0$; $b''_n = b_n$, если $b_n \leqslant 0$ и $b'_n = 0$ при $b'_n > 0$. Имеем:

$$p+qe^{it}=\exp\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}b'_n(e^{int}-1)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}b''_n(e^{int}-1)\right).$$

Отсюда

$$\exp\sum_{n=-\infty}^{\infty}b'_n(e^{int}-1)=(p+qe^{it})\exp\sum_{n=-\infty}^{\infty}b''_n(e^{int}-1). \quad (6,2,4)$$

Слева стоит х. ф. б. д. закона, а справа х. ф. неразложимого з. р. и б. д. з. Это дает пример разложения б. д. з. на неразложимую и б. д. компоненту.

Весьма интересный пример указан П. Леви [65, 66]. Как оказалось возможно построить композицию трех целочисленных пуассоновых случайных величин (следовательно, б. д. з.) с х. ф.

$$\varphi_0(t)=\exp(a(e^{it}-1)+b(e^{4it}-1)+c(e^{5it}-1)), \quad (6,2,5)$$

где a, b, c положительны, и разложить ее в виде

$$\varphi_0(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t),$$

где

$$\varphi_1(t)=\exp(a(e^{it}-1)+a'(e^{2it}-1)-b(e^{3it}-1)+c(e^{4it}-1)+$$
$$+c'(e^{5it}-1);\ a>0,\ a'>0,\ b>0,\ c>0,\ c'>0,$$
$$\varphi_2(t)=\exp(a''(e^{it}-1)-a'(e^{2it}-1)+b(e^{3it}-1)+c''(e^{4it}-1))$$
$$a''>0,\ c''>0.$$

Причем $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — обе х. ф. неразложимых законов.

Таким образом, композиция трех законов Пуассона может быть разложена на композицию двух неразложимых з. р.

Доказательство этого факта весьма глубоко. Мы вернемся к упомянутым работам П. Леви в дальнейшем.

§ 3. ТЕОРЕМА Г. КРАМЕРА

Мы видели, что б. д. з. могут иметь неразложимые компоненты. Однако существуют и б. д. з., которые не могут иметь неразложимых компонент, так что все их компоненты безгранично делимы и могут быть описаны, как указано в § 2.

Класс безгранично делимых законов, которые имеют только безгранично делимые компоненты, обозначим I_0. Значительная часть этой книги будет посвящена описанию класса I_0, хотя полного описания еще не удалось достигнуть.

Описание класса I_0 и вообще построение теории разложения б. д. з. было одной из проблем, выдвинутых Г. Крамером в его известном докладе [53]. Г. Крамером в 1936 г. [51] было впервые обнаружено, что класс нормальных законов входит в I_0. В силу теоремы 6.1.1 это означает, что все компоненты нормального закона нормальны. Эта теорема предугадывалась П. Леви в 1935 г.

Теорема 6.3.1 (Г. Крамер)

Нормальный закон имеет только нормальные компоненты.

Пусть F нормальный закон с х. ф. $\varphi(t)=e^{-at^2+bit}$ $(a\leqslant 0)$ Пусть $F=F_1*F_2$ и

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t), \qquad (6,3,1)$$

где $\varphi_i(t)$ — х. ф. F_i $(i=1,2)$. Мы видим, что $\varphi(t)$ — целая функция порядка 2. По теореме 4.1.3, $\varphi_i(t)$ — целые функции порядков не выше 2. Они не имеют нулей, т. к. $\varphi(t)$ их не имеет. По теореме 1.8.2 (Ж. Гадамара) имеем:

$$\varphi_i(t)=e^{Q_i(t)} \ (i=1,2), \qquad (6,3,2)$$

где $Q_i(t)$ — полиномы не выше второй степени. Согласно сказанному в конце § 3 гл. 3 $\varphi_i(t)$ — х. ф. нормального закона (который может в крайнем случае свестись к несобственному). Теорема доказана.

Эта теорема положила начало исследованиям по разложениям вероятностных законов.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ Г. КРАМЕРА. ТЕОРЕМА В. П. СКИТОВИЧА — Г. ДАРМУА

Мы можем указать теперь одно аналитическое обобщение теоремы Г. Крамера, легко приводящее к интересной теореме В. П. Скитовича — Г. Дармуа, см. [17,24,59,63].

Теорема 6.4.1 (Ю. В. Линник)

Пусть $\varphi_0(t)=e^{Q(t)}$ — характеристическая функция нормальнога закона (так что $Q(t)$ — квадратный полином). Пусть для последовательности различных реальных чисел $t_k\to 0$ имеет место соотношение

$$(\varphi_1(t_k))^{\alpha_1}(\varphi_2(t_k))^{\alpha_2}\ldots(\varphi_s(t_k))^{\alpha_s}=\varphi_0(t_k), \qquad (6,4,1)$$

где $\varphi_j(t)$ — характеристические функции и $\alpha_j>0$. Тогда $\varphi_j(t)$ $(j=1,2,\ldots,s)$ — х. ф. нормального закона, и равенство (6,4,1) *имеет место для любых комплексных значений t_k.*

Разумеется, эта теорема тесно связана с теоремой 4.2.1. Мы можем также связать ее и с теоремой И. Марцинкевича (3 3.1). Для этого будем доказывать несколько более сильную теорему.

Теорема 6.4.2

Если в условиях теоремы 6.4.1 *заменить х. ф. нормального закона на целую функцию вида $\varphi_0(t)=e^{Q(t)}$, где $Q(t)$ — полином степени p под условием $Q(-t)=\overline{Q(t)}$, то выводы* *теоремы* 6.4.1 *останутся в силе, а* $\varphi_0(t)$ *будет характеристической функцией нормального закона* (*так что* $p=2$).

Эту теорему можно рассматривать как аналитическое обобщение одновременно теоремы Г. Крамера и частного случая теоремы И. Марцинкевича (когда отсутствуют нули целой функции).

Прежде всего, согласно теореме 4.2.1, $\varphi_j(t)$ оказываются целыми функциями, не имеющими нулей, и равенство (6,4,1) будет верным для любых комплексных t_k.

Покажем, что

$$\varphi_j(t)=e^{Q_j(t)}\ (j=1,2,\ \ldots,\ s), \tag{6,4,2}$$

где $Q_j(t)$ — полином степени не выше p. Это можно сделать на основе рассуждений § 1 гл. 4 (при доказательстве теоремы 4.1.3)

Рассмотрим $(\varphi_1(t))^{\alpha_1}$, — это целая функция. Пусть

$$M_1(r)=\sup_{|t|\leqslant r}|\varphi_1(t)|^{\alpha_1}=\sup_{|t|=r}|\varphi_1(t)|^{\alpha_1}.$$

Так как $\varphi_1(t)$ — х. ф., то имеем (см. 4,1,26):

$$M_1(r)=\max(|\varphi_1(ir)|^{\alpha_1},\ |\varphi_1(-ir)|^{\alpha_1}).$$

Далее (см. 4,1,28),

$$(\varphi_1(\pm ir))^{\alpha_1}\ldots(\varphi_s(\pm ir))^{\alpha_s}=\varphi_0(\pm ir) \tag{6,4,3}$$

и

$$\prod_{j=2}^{s}(\varphi_j(\pm ir))^{\alpha_j}=\prod_{j=1}^{s}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(\pm rx)\,dF_j(x)\right)^{\alpha_j}>\varepsilon_0, \tag{6,4,4}$$

где $\varepsilon_0>0$; F_j — з. р., отвечающие х. ф. $\varphi_j(t)$. Отсюда

$$(\varphi_1(\pm ir))^{\alpha_1}\leqslant\frac{1}{\varepsilon_0}\varphi_0(\pm ir). \tag{6,4,5}$$

Отсюда

$$M_1(r)\leqslant e^{C_0r^p}\ (r\geqslant 1,\ C_0>0 \text{ — константа}).$$

Так как $(\varphi_1(t))^{\alpha_1}$ — целая функция без нулей, то по теореме 1.8.2 (Ж. Гадамара) имеем (6,4,2) ($j=1$). Далее, по теореме 3.3.1 (И. Марцинкевича) $Q_1(t)$ — квадратный полином и $\varphi_1(t)$ — х. ф. нормального закона. Заменяя индекс $j=1$ на любой из индексов $j=1,2,\ \ldots,\ s$, приходим к доказательству теорем 6.4.2 и 6.4.1.

Из теоремы 6.4.1 следует важная теорема В. П. Скитовича — Г. Дармуа (1953 г.)*, см. [34,35,55].

---

* В. П. Скитович сообщил формулировку теоремы автору в декабре 1952 г. См. также Д. Базу [47].

Теорема 6.4.3. (**В. П. Скитович, Г. Дармуа**)

Пусть $L_1=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\ldots+\alpha_nX_n$ и $L_2=\beta_1X_1+\beta_2X_2+ +\ldots+\beta_nX_n$ *— линейные формы от независимых случайных величин* $X_1,\ldots,X_n$. *Если* L_1 *и* L_2 *стохастически независимы, то те случайные величины,* X_j, *для которых* $\alpha_j\beta_j\neq 0$ *— нормальны.*

Заметим, что обратное утверждение в следующей форме почти тривиально: если $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j=0$ и те X_j, для которых $\alpha_j\beta_j\neq 0$, нормальны, то L_1 и L_2 независимы. В самом деле, $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j=0$ есть условие некоррелированности наших форм, причем общие переменные X_j (входящие в обе формы) нормальны.

Рассматривая общий случай, когда все $\alpha_j\beta_j\neq 0$ $(j=1,2,\ldots n)$, можно сформулировать теорему на геометрическом языке так.

Пусть дан случайный вектор $(X_1,\ldots,X_n)$ в Евклидовом n-мерном пространстве.

Пусть существует система n ортогональных осей таких, что проекции вектора $(X_1,\ldots,X_n)$ на эти оси независимы в совокупности, и еще две оси, определяемые векторами $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, не ортогональными ни к одной из n осей, указанной системы. Пусть проекции вектора $(X_1,\ldots,X_n)$ на эти две оси стохастически независимы. Тогда вектор $(X_1,\ldots,X_n)$ — нормальный.

Эта теорема сравнительно несложно выводится из теоремы 6.4.1 (см. [24]).

Пусть $\varphi_j(t)$ — х. ф. X_j $(j=1,2.\ldots,n)$. Так как L_1 и L_2 стохастически независимы, имеем для любых реальных u и v

$$E\exp(i(uL_1+vL_2))=E\exp(iuL_1)E\exp(ivL_2). \tag{6,4,6}$$

Для удобства дальнейшего для тех j, где $\alpha_j\beta_j\neq 0$, обозначим $\beta_jX_j=Y_j$; $\frac{\beta_j}{\alpha_j}=b_j$. Для тех j, для которых $\alpha_j\beta_j=0$, но $\alpha_j\neq 0$, обозначим $\beta_jX_j=Y_j$; для тех j, для которых $\alpha_j\beta_j=0$, но $\beta_j\neq 0$, обозначим $\beta_jX_j=Y_j$; х. ф. Y_j $(j=1,2,\ldots,n)$ обозначим $\varphi_j(t)$. Имеем:

$$uL_1+vL_2=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_ju+\beta_jv)X_j. \tag{6,4,7}$$

Рассмотрим такую окрестность нуля по u, v $|u|<\delta_0$, $|v|<\delta_0$, что для всех значений j

$$\left.\begin{array}{c} E\exp i(\alpha_ju+\beta_jv)X_j\neq 0;\ E\exp(i\alpha_juX_j)\neq 0;\\ E\exp(i\beta_jX_j)\neq 0. \end{array}\right\} \tag{6,4,8}$$

Последние два условия, разумеется, тривиальны при $\alpha_j=0$ или $\beta_j=0$.

Из (6,4,6) и (6,4,7) в указанной окрестности нуля получаем

$$\prod_j{}' \varphi_j(u+b_jv)=\prod_j{}' \varphi_j(u)\,\varphi_j(u), \tag{6,4,9}$$

где суммирование идет только по тем j. для которых $\alpha_j\beta_j\neq 0$. Остальные сомножители, встречаясь в (6,4,6) справа и слева, сокращаются, будучи неравными нулю. Изменяя в случае нужды нумерацию переменных, перепишем (6,4,9) в виде

$$\prod_{j=1}^{m} \varphi_j(u+b_jv)=\prod_{j=1}^{m} \varphi_j(u)\,\varphi_j(v), \tag{6,4,10}$$

где $1\leqslant m\leqslant n$.

В силу (6,4,8) полагая в указанной ранее окрестности нуля $\ln\varphi_j(t)=\psi_j(t)$ (где $\ln\varphi_j(0)=0$), записываем (6,4,10) в виде

$$\sum_{j=1}^{m}\psi_j(u+b_jv)=A(u)+B(v). \tag{6,4,11}$$

Все функции, участвующие в (6,4,11), непрерывны. Умножим обе части (6,4,11) на $(x-u)$ и проинтегрируем по u от 0 до x, где $|x|<\delta_0$. Получим

$$\sum_{j=1}^{m}\int_0^x (x-u)\,\psi_j(u+b_jv)\,du=x\int_0^x A(u)\,du-\int_0^x uA(u)\,du+$$
$$+B_0(v)\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}B_0(v)+Q(x) \tag{6,4,12}$$

в понятных обозначениях. Полагая $u+b_jv=\tau$, $|\tau|<\delta_1<\delta_0$, найдем отсюда

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{-b_jv}^{x+b_jv}(x+b_jv-\tau)\,\psi_j(\tau)\,d\tau=\frac{x^2}{2}B(v)+Q(x), \tag{6,4,13}$$

или

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{0}^{x+b_jv}(x+b_jv-\tau)\,\psi_j(\tau)\,d\tau=\frac{x^2}{2}B_0(v)+xB_1(v)+$$
$$+B_2(v)+Q(x), \tag{6,4,14}$$

где $B_0(v)$, $B_1(v)$, $B_2(v)$ — непрерывные функции x. Равенство (6,4,14) верно при $|x|<\delta_2$; $|v|<\delta_2$; $0<\delta_2<\delta_1$.

Левая часть равенства (6,4,14), очевидно, дифференцируема по v при каждом фиксированном значении x, $|x|<\delta_2$. Легко видеть, что отсюда следует дифференцируемость $B_0(v)$, $B_1(v)$ и $B_2(v)$. Дифференцируя (6,4,14) по v при заданном x, имеем:

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \int_0^{x+b_j v} \psi_j(\tau)\,d\tau = \frac{x^2}{2} B_0'(v) + xB_1'(v) + B_2'(v) \qquad (6,4,15)$$

в той же области значений v и x. Левая часть дифференцируема по v при любых заданных значениях $x \in [-\delta_2, \delta_2]$, откуда следует существование $B_0''(v)$; $B_1''(v)$; $B_2''(v)$. Дифференцируя (6,4,15) по v и полагая $v=0$, находим

$$\sum_{j=1}^{m} b_j^2 \psi_j(x) = P(x), \ |x| < \delta_2, \qquad (6,4,16)$$

где $P(x)$ — квадратный полином. Отсюда

$$\prod_{j=1}^{m} (\varphi_j(x))^{b_j^2} = e^{P(x)}, \ |x| < \delta_2. \qquad (6,4,17)$$

Далее, $P(-x) = \overline{P(x)}$, так что справа стоит х. ф. нормального закона.

Так как $b_j^2 > 0$, то по теореме 6.4.1 $\varphi_j(x)$ — х. ф. нормального закона, что и доказывает теорему 6.4.3.

Заметим, что от условия $\alpha_j\beta_j \neq 0$ нельзя отказаться, например, формы $L_1 = X_1$, $L_2 = X_2$ независимы при любых независимых X_1 и X_2. Для тех индексов j, для которых $\alpha_j\beta_j = 0$, переменные могут быть произвольными.

Заметим еще, что частный случай теоремы В. П. Скитовича — Г. Дармуа, именно случай

$$\alpha_j\beta_j \neq 0; \ |b_j| = \left|\frac{\beta_j}{\alpha_j}\right| = \sqrt{r_j} \ (j = 1,2, \ldots, n), \qquad (6,4,18)$$

где r_j — рациональные числа, следует уже из теоремы Г. Крамера (6.3.1). Именно в этом случае легко обнаружить, что $\varphi_j(t) \neq 0$ $(j = 1,2, \ldots, n)$ на всей оси и равенство (6,4,17) верно для всех реальных x. Далее $b_j^2 = r_j = \frac{m_j}{m_0}$, $(j = 1,2, \ldots, n)$, где m_j, m_0 — натуральные числа. Возведя равенство (6,4,17) в степень m_0, найдем

$$\prod_{j=1}^{m} (\varphi_j(x))^{m_j} = \exp(m_0 P(x)). \qquad (6,4,19)$$

Поскольку $m_j > 0$ — целые числа, то $(\varphi_j(x))^{m_j}$ — х. ф.; справа стоит х. ф. нормального закона (ибо $P(-x) = \overline{P(x)}$), следовательно, по теореме Г. Крамера $\varphi_j(x)$ суть х. ф. нормального закона. Однако общий случай теоремы 6.4.3 не выводится таким образом из теоремы Г. Крамера; так получается лишь указанный частный случай.

Обратно, теорема Г. Крамера 6.3.1 легко выводится из одного частного случая теоремы В. П. Скитовича — Г. Дармуа 6.4.3 (см. [18]), а именно, для такого вывода достаточна теорема 6.4.3 при условии, что $\alpha_j\beta_j \neq 0$ ($j=1,2, \ldots, n$) и числа $\frac{\beta_j}{\alpha_j}$ — целые.

В самом деле, пусть $Z=X+Y$ нормально; X, Y — независимы.

Введем величины X', Y', распределенные соответственно как X, Y, и такие, что X, Y, X', Y' — независимы в совокупности. Положим

$$L_1=Z+Z'=X+Y+X'+Y'; \; L_2=Z-Z'= \\ =X+Y-X'-Y'. \tag{6,4,20}$$

Тогда L_1 и L_2 будут в нормальной корреляции; далее, они будут независимы, ибо L_1 и L_2 нормальны, и $E(L_1L_2)=$ $=E(Z^2-Z'^2)=0.$ По теореме В. П. Скитовича — Г. Дармуа отсюда следует нормальность X и Y, т. е. теорема Г. Крамера.

Существует и иной вывод теоремы 6.4.3, первоначально данный В. П. Скитовичем [34, 35]. Он основывается на теореме И. Марцинкевича (3.3.1) и Г. Крамера (6.4.1).

Заметим, что теорема 6.4.3 принадлежит к кругу проблем о независимых статистиках, разрабатывавшихся Г. Джейри, Э. Лукачем [70, 71], Ю. В. Линником [15], А. А. Зингером [8], Р. Лага [47], и другими.

Другое обобщение теорем 6.3.1 и 6.4.3 получается при отказе от вероятностного смысла слагаемых (см. [25]).

Пусть B класс всех функций $V(x)$, удовлетворяющих условиям:

1°. $V(x)$ ограниченной вариации в $(-\infty, \infty)$.

2°. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dV(x)=1.$

Разумеется, все з. р. принадлежат B. Далее, будем называть $V(x) \in B$ симметрическими, если во всех точках непрерывности $V(x)$

$$V(x)=1-V(-x),$$

видим, что для симметрических $V(x)$, $f(t)=f(-t)=$ $=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos txdV(x)$ реальна.

Будем рассматривать композицию $V_i(x) \in B$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} V_1(x-z)\,dV_2(z) = V_1(x) * V_2(x). \tag{6,4,21}$$

Подобное разложение хотя и не имеет прямого вероятностного смысла, однако встречается на практике, например в некоторых вопросах радиотехники.

Знаком $\mathrm{Var}\, V(x)|_a^b$ будем обозначать полную вариацию $V(x)$ на сегменте $[a, b]$. Сформулируем еще одно обобщение теоремы Г. Крамера (6.3.1).

Теорема 6.4.4 (Ю. В. Линник, В. П. Скитович)*

Пусть имеем разложение нормального закона $G(x)$

$$G(x) = V_1(x) * V_2(x), \tag{6,4,22}$$

где $V_i(x) \in B$ $(i = 1,2)$ симметрические и притом:

$$\mathrm{Var}\, V_i(x) \Big|_y^\infty = O(\exp(-y^{1+\gamma}));$$

$$\mathrm{Var}\, V_i(x) \Big|_{-\infty}^{-y} = O(\exp(-y^{1+\gamma})) \tag{6,4,23}$$

при $y > 0$ *и каком-либо* $\gamma > 0$. *Тогда* $V_1(x)$ *и* $V_2(x)$ — *нормальные законы распределения.*

Вместе с тем существуют функции $W_1(x) \in B$ *и* $W_2(x) \in B$ *симметрические и такие, что* $G(x) = W_1(x) * W_2(x)$ *и*

$$\mathrm{Var}\, W_i(x) \Big|_y^\infty = O\left(\exp - y\frac{\ln(y+1)}{2}\right);$$

$$\mathrm{Var}\, W_i(x) \Big|_{-\infty}^{-y} = O\left(\exp - y\frac{\ln(y+1)}{2}\right) \tag{6,4,24}$$

$(i = 1,2;\ y > 0)$, *причем* $W_1(x)$ *есть вероятностное распределение, а* $W_2(x)$ *не является нормальным и, следовательно, в силу теоремы* 6.3.1, *не является вероятностным распределением.*

При доказательстве можем, не нарушая общности, допустить, что $G(x) \in N(0,1)$ и имеет х. ф. $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Рассмотрим

$$f_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dV_j(x) \quad (j = 1,2), \tag{6,4,25}$$

где $V_j(x) \in B$ и удовлетворяет (6,4,23). Элементарные оценки показывают нам, что $f_j(t)$ — целые функции комплексного переменного t, притом конечного порядка (в силу $\gamma > 0$). Имеем:

$$f_1(t) f_2(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{6,4,26}$$

---

* В работе Ю. В. Линника и В. П. Скитовича [25] по недосмотру при формулировке опущено требование симметричности. Тогда теорема неверна.

Таким образом, $f_j(t)$ не имеют нулей. По теореме Ж. Гадамара 1.8.2 имеем:

$$f_j(t) = \exp(P_j(t)), \tag{6,4,27}$$

где $P_j(t)$ — полином степени $p \geqslant 0$. Так как $V_j(x)$ симметрические, то $f_j(t)$ — четные и реальные при реальных t и $P_j(t)$ имеют реальные коэффициенты и притом содержат только четные степени t.

Но тогда $f_j(t) = e^{-\alpha_j t^2}$, $\alpha_j \geqslant 0$. В самом деле, из (6,4,26) следует, что если бы в $P_j(t)$ присутствовали бы степени t, бóльшие 2, то у одного из $P_j(t)$, у старших из таких степеней, был бы положительный коэффициент, и тогда соответствующая $f_j(t)$ при $t \to \infty$ неограниченно возрастала бы, что противоречило бы (6,4,25). Итак, полином $P_j(t) = -\alpha_j t^2$ (свободный член отсутствует, ибо $P(0) = 0$, в силу условия 2). При этом должно быть $\alpha_j \geqslant 0$, иначе $f_j(t)$ опять неограниченно возрастала бы при $t \to \infty$. Это доказывает первую часть теоремы. Перейдем к доказательству дополнительного утверждения.

Пусть дан нормальный з. р. с х. ф. $\exp(-t^2)$. Построим разложение $G(x) = W_1(x) * W_2(x)$, где $W_1(x)$ будет з. р. с х. ф.

$$f_1(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} + \lambda(e^{it} - 1) + \lambda(e^{-it} - 1)\right). \tag{6,4,28}$$

($\lambda > 0$ — малое положительное число).
$W_2(x)$ должна быть такой, что

$$f_2(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dW_2(x) =$$

$$= \exp\left(-\frac{t^2}{2} - \lambda(e^{it} - 1) - \lambda(e^{-it} - 1)\right). \tag{6,4,29}$$

Покажем, что $W_2(x) \in B$ и удовлетворяет (6,4,24). Имеем ($j = 1,2$):

$$W_j'(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} \pm \lambda(e^{it} - 1) \pm \right.$$

$$\left. \pm \lambda(e^{-it} - 1) - itx\right) dt, \tag{6,4,30}$$

где знак (+) надо брать при $j = 1$, а знак (—) при $j = 2$.

Выберем на плоскости комплексного переменного $t = \xi + i\eta$ контур $\eta = \pm \ln(|x| + 1) = \eta_0$ (знак (+) при $x < 0$; знак (—) при $x > 0$), получим оценку для плотности $W_j'(x)$

$$O\left(\exp\left(\frac{\eta_0}{2} + 2\lambda e^{|\eta_0|} - |\eta_0||x|\right)\right) \tag{6,4,31}$$

или при $|x| > 1$ оценку

$$O\left(\exp - \frac{3}{4}|x| \ln|x|\right), \tag{6,4,32}$$

что и доказывает (6,4,24) и дополнительное утверждение теоремы. Аналогичное видоизменение существует и у теоремы 6.4.3.*

Будем рассматривать „обобщенные случайные величины", которым вместо законов распределения $F(x)$ отвечают функции ограниченной вариации $V(x)$, описанные выше. Естественно вводится для них понятие независимости и суммирования.

Теорема 6.4.5

Пусть $L = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n$; $L_2 = \beta_1 X_1 + \ldots \beta_n X_n$ линейные формы от независимых симметрических „обобщенных случайных величин" с „законом распределения" $V_i(x)$ под условиями (6,4,23). *Пусть $\alpha_j \beta_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) и L_1 и L_2 независимы. Тогда все X_i нормальны. Вместе с тем, уже при $n = 4$, существуют пары независимых линейных форм L_1, L_2 от независимых симметрических „обобщенных случайных величин" под условием* (6,4,24), *где не все $V_i(x)$ являются нормальными (и стало быть, не все $V_i(x)$ являются вероятностными) законами распределения.*

Полагая

$$f_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dV_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{6,4,33}$$

видим (см. доказательство теоремы 6.4.3), что

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(\alpha_k u + \beta_k v) = \prod_{k=1}^{n} f_k(\alpha_k u) \prod_{k=1}^{n} f_k(\beta_k v). \tag{6,4,34}$$

В некоторой окрестности нуля $|u| < \delta_0$, $|v| < \delta_0$, очевидно, все функции, входящие в (6,4,34) не обращаются в 0. Полагая в этой окрестности $\ln f_k(t) = \psi_k(t)$, ($\psi_k(0) = 0$) и замечая, что в силу (6,4,23), $f_k(t)$ — целые функции, найдем при $|u| < \delta_0$, $|v| < \delta_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \psi_k(\alpha_k u + \beta_k v) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(\alpha_k u) + \sum_{k=1}^{n} \psi_k(\beta_k v).$$

Дифференцируя дважды по v и полагая $v = 0$, находим

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \psi_k''(\alpha_k u) = c \quad [c \text{ — константа}], \tag{6,4,35}$$

* И в этом видоизменении в работе Ю. В. Линника и В. П. Скитовича [25] по недосмотру опущено требование, чтобы обобщенные случайные величины были симметрическими.

полагая $\frac{\beta_k^2}{\alpha_k^2}=a_k>0$, найдем отсюда при $|u|<\delta_0$.

$$\prod_{k=1}^{n}(f_k(\alpha_k(u))^{a_k}=\exp P(u), \tag{6,4,36}$$

где $P(u)$ — квадратный полином. Так как $a_k>0$ и $f_k(\alpha_k u)$ целые функции, то из (6,4,36) следует, что $f_k(\alpha_k u)$ не имеют нулей, и равенство (6,4,36) верно при всех u. Далее, $(f_k(\alpha_k u))^{a_k}$ — четные функции и $f_k(0)=1$, так что $P(u)=-au^2$, $a\leqslant 0$.

Отсюда, как и при выводе теоремы 6.4.4, заключаем, что $(f_k(\alpha_k u))^{a_k}=\exp(-b_k u^2)$, $b_k\leqslant 0$ и $f_k(t)=\exp(-c_k t^2)$, $c_k\leqslant 0$, так что все X_k нормальны.

Докажем дополнительное утверждение теоремы. Пусть X_1, X_2 независимые нормальные величины с х. ф. e^{-t^2}, соответствующие функциям $W_1(x)$ и $W_2(x)$; Y_1 Y_2 — независимые обобщенные случайные величины с х. ф. вида (6,4,28) и (6,4,29); Y_2' и Y_2' — независимые от них экземпляры таких же величин. Составим линейные формы:

$$L_1=X_1+X_2=Y_1+Y_2+Y_1'+Y_2';$$
$$L_2=X_1-X_2=Y_1+Y_2-Y_1'-Y_2'.$$

Они, очевидно, независимы, причем Y_i, Y_i' не являются нормальными и удовлетворяют (6,4,24).

Другие обобщения теоремы Г. Крамера см. у Д. Дюгэ [56, 59].

§ 5. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ В. П. СКИТОВИЧА — Г. ДАРМУА И ДРУГИХ ТЕОРЕМ К ВЫВОДУ КЛАССИЧЕСКОГО ЗАКОНА МАКСВЕЛЛА

Теорема 6.4.3, а также некоторые другие теоремы позволяют сделать простой вывод известного закона Максвелла о распределении скоростей движения молекул на основании меньшего числа гипотез, чем это делалось ранее в классической статистической физике (см., например, [39]).

Пусть X — трехмерный случайный вектор, дающий скорость движения молекул в трехмерном пространстве. Сделаем две гипотезы:

I. Существует система трех ортогональных осей таких, что проекции X_1, X_2, X_3 нашего вектора на эти оси стохастически независимы и одинаково распределены;

II. Существуют еще две оси, не ортогональные ни к одной из трех ранее указанных, и такие, что проекции вектора X на них стохастически независимы.

Из этих двух гипотез, на основании теоремы 6.4.3, вытекает нормальность вектора X с одинаковой дисперсией компонент X_1, X_2, X_3, т. е. классический закон Максвелла.

Если в гипотезе I отбросить одинаковую распределенность, то снова вектор X получается нормальным, но с неравными дисперсиями („эллипсоидальный“ нормальный закон, отвечающий закону Шварцшильда для распределения скоростей звезд).

В связи с этими применениями, укажем еще несколько иных выводов закона Максвелла, не опирающихся на теорему 6.4.3 [14].

Примем гипотезу I, а вместо гипотезы II введем другую гипотезу. Пусть случайно взята молекула со скоростью (X, Y, Z). Спроектируем эту скорость на „биссектрису“ $x=y=z$. Проекция $\widetilde{X}$ будет пропорциональна $X+Y+Z$. Далее, проектируем молекулу на плоскость $x+y+z=0$, перпендикулярную к „биссектрисе“. Тогда кинетическая энергия движения этой проекции будет:

$$W=\frac{m}{2}\left[\left(X-\tilde{X}\right)^2+\left(Y-\tilde{Y}\right)^2+\left(Z-\tilde{Z}\right)^2\right],$$

где m — масса молекулы. Введем гипотезу.

II′. Кинетическая энергия W стохастически независима от проекции скорости $\tilde{X}$.

В этом случае снова получаем нормальность (X, Y, Z), т. е. закон Максвелла. Это следует из теоремы А. А. Зингера [8]. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 1)$ независимы и одинаково распределены, и $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ стохастически независимо от $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, то все x_i нормальны.

Мы приведем еще некоторые варианты вывода закона Максвелла [15, 16], ибо применяемые в них теоремы довольно тесно связаны с теорией разложения вероятностных законов.

Сформулируем без доказательств две теоремы (доказательства см. в [16])

Теорема 6.5.1 (Ю. В. Линник)

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ независимы и одинаково распределены; рассмотрим две линейные формы.

$$L_1=a_1x_1+\ldots+a_rx_r;$$
$$L_2=b_1x_1+\ldots+b_rx_r$$

под условием $\sup(|a_1|, \ldots, |a_r|) \neq \sup(|b_1|, \ldots, |b_r|)$.

Составим целую функцию $G(z)=|a_1|^z+\ldots+|a_r|^z-|b_1|^z-\ldots-|b_r|^z$. *Для эквивалентности двух утверждений:*

A) *наблюдения* x_i *принадлежат к нормальному типу рассуждения;*

B) L_1 *и* L_2 *одинаково распределены — необходимо и достаточно выполнение следующих условий*:

1°. $a_1+a_2+\ldots+a_r=b_1+b_2+\ldots+b_r$.

2°. $G(2)=0$.

3°. *Все положительные корни* $G(z)$, *являющиеся целыми числами, делящимися на 4, должны быть простыми.*

4°. *Все положительные корни* $G(z)$, *являющиеся целыми четными числами* $\equiv 2 \pmod 4$ *должны иметь кратность не свыше* 2, *притом, если есть такой двукратный корень, он должен быть единственным и максимальным из всех положительных корней* $G(z)$.

5°. *Если* $G(z)$ *имеет положительный корень* γ, *не являющийся целым четным числом, то он должен быть единственным, максимальным из положительных корней, простым и* $\left[\frac{\gamma}{2}\right]$ (*целая часть* $\frac{\gamma}{2}$ *должна быть нечетной**).

Теорема 6.5.2 (Ю. В. Линник)

Пусть, в обозначениях предыдущей теоремы:

$$\sup(|a_1|, \ldots, |a_r|) \neq \sup(|b_1|, \ldots, |b_r|) \qquad (6,5,1)$$

и L_1 *одинаково распределено с* L_2. *Пусть* γ *максимальный реальный корень* $G(z)$. *Тогда* $\gamma>0$. *Если закон распределения* x_i, $F(x)$ *имеет* 2 m*-й момент, где* $m=\left[\frac{\gamma}{2}+1\right]$, *то* $F(x)$ — *нормальный закон.*

Вернемся к построению новых выводов закона Максвелла. Сохраняя I гипотезу (существование трех ортогональных осей, проекции скорости x_1, x_2, x_3 на которые независимы и одинаково распределены), введем еще гипотезу.

II. Существуют еще две оси (не обязательно ортогональные), такие, что проекции скорости на них

$$l_1=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3; \quad l_2=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$$

одинаково распределены. Будем предполагать, что выполнено (6,5,1) (при $r=3$). Составим $G(z)=|a_1|^z+\ldots-|b_3|^z$.

Если выполнены условия теоремы 6.5.1, то будет иметь место закон Максвелла. Однако эти условия, хотя и не стеснительны, но несколько громоздки. Ввиду этого рассмотрим еще применение более просто формулируемой теоремы 6.5.2.

Если угол φ между двумя новыми осями мал, то a_1, a_3, a_3 будут близки к b_1, b_2, b_3 и наибольший реальный корень $G(z)$ γ будет велик. Посмотрим, какую гипотезу о скорости моле-

* В рецензии на работу [16] (Math Reviews, 1954) К. Л. Чжун указывает на пробел в § 52, стр. 277. Проверка § 52 показала, что это недоразумение.

кул нужно сделать, чтобы совместно с ней гипотезы I и II привели бы к закону Максвелла.

Пусть первая ось с направляющим единичным вектором $a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}$ расположена в положительном октанте и $a_1>a_2$; $a_1>a_3$. Пусть другая ось с направляющим единичным вектором $b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{h}$ составляет с первой осью малый угол φ. Тогда, если φ достаточно мало, будем иметь: $b_i>0$; $b_1>b_2$; $b_1>b_3$.

Пусть $a_1=b_1+\xi$, $\xi>0$. Тогда имеем при $x>0$

$$G(x)>|a_1|^x-3|b_1|^x=b_1^x\left[\left(1+\frac{\xi}{b_1}\right)^x-3\right]>b_1^x\left[\frac{x\xi}{2b_1}-2\right]$$

при достаточно малом угле φ. При $x>\frac{4b_1}{\xi}$ $G(x)\neq 0$.

Итак, наибольший положительный корень γ у функции $G(z)$ будет меньше $\frac{4b_1}{\xi}$. Положим

$$2m=2\left[\frac{2b_1}{\xi}+2\right].$$

Если средняя $2m$-я степень скорости молекулы конечна, то имеет место закон Максвелла.

§ 6. ТЕОРЕМА Д. А. РАЙКОВА О РАЗЛОЖЕНИИ ЗАКОНА ПУАССОНА

В 1937 г. Д. А. Райков [28, 31] доказал, что закон Пуассона принадлежит I_0, что, разумеется, в силу теоремы (6.1.1), равносильно тому, что он разлагается только на законы Пуассона.

Теорема 6.6.1. (Д. А. Райков)

Закон распределения Пуассона имеет компонентами только законы распределения Пуассона.

При доказательстве этой теоремы мы можем, разумеется, ограничиться простейшим видом закона Пуассона. Пусть переменная X имеет простейшее Пуассоново распределение

$$P(X=m)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\,(m=0,1,2,\ldots);\ \varphi(t)=$$
$$=Ee^{itX}=\exp(\lambda(e^{it}-1)). \qquad (6,6,1)$$

Пусть имеем:

$$X=X_1+X_2, \qquad (6,6,2)$$

где X_1 и X_2 независимы. Так как X имеет решетчатое распределение, то согласно теореме 5.1.1 X_j $(j=1,2)$ также решетчатые и имеют точками роста $\beta+m$ $(m=0;\ \pm 1;\ \pm 2,\ldots)$ и $\beta-m$. Делая сдвиг на β в X_1 и X_2, приходим к компонентам X, для которых $\beta=0$; будем считать X_1 и X_2 таковыми. Очевидно, тогда точками роста X_j $(j=1,2)$ могут быть только $m=0,1,2,\ldots$

Полагая $e^{it}=z$, $p_{mj}=P(X_j=m)$, введем производящие функции

$$g_j(z)=\sum_{m=0}^{\infty} p_{mj}z^m \, (j=1,2), \ |z|\leqslant 1, \tag{6,6,3}$$

$$g(z)=e^{\lambda(z-1)} \tag{6,6,4}$$

и находим при $|z|\leqslant 1$

$$g_1(z)\,g_2(z)=g(z). \tag{6,6,5}$$

Имеем из (6,6,5):

$$\sum_{u=0}^{m} p_{u1}p_{m-u,\,2}=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}. \tag{6,6,6}$$

Пусть $p_{u_0,\,1}>0$ первое неравное 0 число из $p_{u,\,1}$. Тогда (6,6,6) дает

$$p_{m-u_0,\,2}\leqslant\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \tag{6,6,7}$$

или, при $n\geqslant 1$

$$p_{n,\,2}\leqslant\frac{\lambda^{u_0}e^{-\lambda}\lambda^n}{(n+u_0)!}. \tag{6,6,8}$$

Меняя ролями X_1 и X_2, получим вообще при $j=1,2$

$$p_{n,\,j}<C\frac{\lambda^n}{n!}\ (C>0 - \text{константа}). \tag{6,6,9}$$

Отсюда следует, что $g_j(z)$ суть целые функции экспонентного типа. В силу (6,6,5) они не имеют нулей. По теореме 1.8.2 (Ж. Гадамара) имеем:

$$g_j(z)=e^{\lambda_j(z-1)} \tag{6,6,10}$$

(ибо $g_j(1)=1$). Остается доказать, что $\lambda_j\geqslant 0$. Но это явствует из того, что, согласно (6,6,10),

$$p_{mj}=\frac{e^{-\lambda_j}\lambda_j^m}{m!}. \tag{6,6,11}$$

Если бы было $\lambda_j<0$, то имели бы

$$EX_j=\sum_{m=0}^{\infty} mp_{mj}=\lambda_j<0, \tag{6,6,12}$$

что, очевидно, невозможно. Это и доказывает теорему.

Заметим, что мы здесь существенным образом опирались на решетчатость наших слагаемых. Именно это позволило свести периодическую целую функцию бесконечного порядка exp $(\lambda e^{it}-1)$ к целой функции экспонентного типа $e^{\lambda(z-1)}$.

Глава седьмая

РАЗЛОЖЕНИЕ КОМПОЗИЦИИ ЗАКОНОВ ГАУССА И ПУАССОНА

Прежде, чем переходить к общим теоремам о классе I_0 безгранично делимых законов, имеющих только безгранично делимые компоненты, рассмотрим один частный случай, на котором сущность применяемых методов видна довольно хорошо. Таким частным случаем является вопрос о разложении композиции законов Гаусса и Пуассона, охватывающий одновременно теоремы Г. Крамера 6.3.1 и Д. А. Райкова 6.6.1.

После изложения этого вопроса мы сможем действовать в общем случае на основании довольно прозрачных аналогий в отношении теорем о достаточном признаке принадлежности безгранично делимого закона к I_0.

Мы будем следовать изложению автора [19], внося значительные упрощения. В частности, не нужно будет употреблять понятия и свойства точек Лебега измеримой функции.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть $X_1 \in N(a, \sigma)$ нормальные случайные величины с параметрами a, σ, а X_2 подчиняется закону Пуассона

$$P(X_2 < x) = F\left(\frac{x-\alpha}{\beta};\ \lambda\right),$$

где α — любое реальное число; $\beta > 0$; $\lambda \geqslant 0$ и

$$F(x,\ \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k<x} \frac{\lambda^k}{k!}\ (x \geqslant 0).$$

Пусть X_2 стохастически не зависит от X_1; составим случайную величину

$$Y = X_1 + X_2, \tag{7,1,1}$$

Y будет композицией законов Гаусса и Пуассона.

Пусть имеем другое разложение Y на сумму двух независимых величин Y_1 и Y_2.

$$Y = Y_1 + Y_2$$

Теорема 7.1.1 (Ю. В. Линник)

Композиция законов Гаусса и Пуассона может быть разложена только на подобные же композиции.

Точнее, пусть $\sigma \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$. *Для существования разложения вида* (7,1,2) *необходимо* (*и, тривиальным образом, достаточно*), *чтобы существовали разложения*

$$Y_j = Y_{j1} + Y_{j2} \quad (j = 1,\ 2),$$

где случайные величины Y_{jk} *независимы в совокупности, причем* Y_{j1} — *нормальны*; Y_{j2} — *пуассоновы и*

$$D(Y_{11}) + D(Y_{21}) = D(X_1);$$
$$D(Y_{12}) + D(Y_{22}) = D(X_2).$$

Мы видим, что теоремы Г. Крамера (6.3.1) и Д. А. Райкова (6.6.1) частные случаи этой теоремы. Однако доказательство теоремы весьма затруднительно в силу того, что здесь нельзя использовать основные факторы в доказательствах теорем 6.3.1 и 6.6.1 — конечность порядка х. ф. для нормального случая и решетчатость распределения для Пуассонова случая. Х. ф. композиции законов Гауссона и Пуассона имеет, как целая функция, бесконечный порядок, а соответствующий з. р. не является решетчатым. Ввиду этого приходится применять довольно глубокие теоремы теории целых функций.

Обращаясь к разложениям (7,1,2), будем прежде всего считать пока, что $\sigma > 0$, $\lambda > 0$. Далее, за счет линейного преобразования величин Y_1, Y_2, Y можем считать, что х. ф. имеет вид

$$f_0(t) = \exp(-\gamma t^2 + \lambda(e^{it} - 1)), \tag{7,1,3}$$

где $\gamma > 0$, $\lambda > 0$. Полагая

$$f_j(t) = E\exp(itY_j),\ (j = 1,\ 2), \tag{7,1,4}$$

получим

$$f_0(t) = f_1(t)\, f_2(t).$$

Так как $f_0(t)$ — целая функция, то, по теореме 4.1.1, $f_j(t)$ $(j = 1,\ 2)$ также целые функции, и равенство (7,1,4) верно для всех комплексных t. Нам удобно будет положить $it = z$; $t = -iz$, и обозначить $\varphi_j(z) = E\exp(zY_j)$ $(j = 1,\ 2)$, $\varphi_0(z) = E\exp(zY)$. Имеем:

$$\varphi_0(z) = \varphi_1(z)\, \varphi_2(z) \tag{7,1,5}$$

для любых значений z. Для реальных z $\varphi_0(z) > 0$, значит, положительны и $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$. Далее, из (7,1,5) видно, что целые функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ не имеют нулей. Ввиду этого существует $\ln\varphi_1(z)=g(z)$ — целая функция, такая, что $g(0)=0$ (реальная на реальной оси). Итак, имеем:

$$\varphi_1(z)=\exp g(z). \qquad (7,1,6)$$

Положим $\varphi(x)=e^{\lambda}\varphi_0(z)$. Тогда из (7,1,5)

$$\varphi_2(z)=\varphi_0(z)\exp(-g(z)),$$

или

$$e^{\lambda}\varphi_2(z)=\varphi(z)\exp(-g(z)). \qquad (7,1,7)$$

Итак,

$$\exp g(z)=E\exp zY_1;\ \varphi(z)\exp-g(z)=e^{\lambda}E\exp zY_2; \qquad (7,1,8)$$

$$\varphi(z)\exp g(z)=e^{\lambda}\varphi_0(z)\varphi_1(z). \qquad (7,1,9)$$

Таким образом, обе функции $\varphi(z)\exp(\pm g(z)$ отличаются лишь положительным множителем e^{λ} от х. ф. (при $z=it$). В силу теоремы 3,2,1, имеем основную лемму, полагая $z=x+iy$.

Лемма 1

$$|\varphi(x+iy)\exp(\pm g(x+iy)|\leqslant\varphi(x)\exp(\pm g(x)), \qquad (7,1,10)$$

где неравенство верно для любого знака и при всех реальных x и y. Пусть $\operatorname{Re} g(z)=u(x,\ y)$, $Ig(z)=v(x,\ y)$. Имеем:

$$g(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y). \qquad (7,1,11)$$

Очевидно,

$$\exp g(x+iy)|\leqslant\exp g(x), \qquad (7,1,12)$$

так что

$$u(x,\ y)\leqslant u(x,\ 0). \qquad (7,1,13)$$

Далее,

$$\varphi(z)=\exp(\gamma z^2+\lambda e^z). \qquad (7,1,14)$$

Отсюда

$$|\varphi(x+iy)\exp\pm g(x+iy)|=\exp(\gamma(x^2-y^2)+ \\ +\lambda e^x\cos y\pm u(x,\ y)). \qquad (7,1,15)$$

Лемма 2

$$0\leqslant u(x,\ 0)-u(x,\ y)<\gamma y^2+2\lambda e^x\sin^2\frac{y}{2}. \qquad (7,1,16)$$

Левое неравенство ясно из (7,1,13). Далее, из леммы 1, при знаке (—), находим

$$\gamma(x^2-y^2)+\lambda e^x\cos y-u(x,\ y)\leqslant\gamma x^2+\lambda e^x-u(x,\ 0). \qquad (7,1,17)$$

Особо важен случай, когда $y=2m\pi$, где $m=0;\ \pm 1;\ \pm 2,\ldots$ — любое целое число. В этом случае $\sin^2\frac{y}{2}=0$, и из (7,1,16) выводим:

Лемма 3

$$0 \leqslant u(x, 0) - u(x, 2m\pi) \leqslant 4\gamma\pi^2 m^2 \qquad (7,1,18)$$

для любого реального x и любого целого m. Чтобы изучить поведение $u(x, y)$, нам нужно получить сведения об $u(x, 0)$.

Лемма 4

$$u(x, 0) = O(x^2 + e^x).$$

Для доказательства замечаем, что

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z)\exp(-g(z)) &= e^{\lambda} E \exp(zY_2); \\ \varphi(z)\exp(g(z)) &= e^{\lambda} E \exp z(Y_0 + Y_1), \end{aligned}\right\} \qquad (7,1,20)$$

где Y_0 — случайная величина, распределенная так же, как Y, и независимая от Y_1. Введем еще нормальную величину Z, для которой $E\exp(zZ) = \exp\gamma z^2$, и которая независима от Y_2.

Умножая (7,1,20) на $E\exp(zZ)$ (первое равенство), найдем при $z = x$

$$\exp(2\gamma x^2 + \lambda e^x - u(x, 0)) = e^{\lambda} E \exp x(Z + Y_2). \quad (7,1,21)$$

Кроме того, (7,1,20) дает

$$\exp(\gamma x^2 + \lambda e^x + u(x, 0)) = e^{\lambda} E \exp x(Y_0 + Y_2). \quad (7,1,22)$$

Рассмотрим случайные величины $Z + Y_2$ и $Y_0 + Y_2$. В каждую из них входит независимая от Y_2 гауссова компонента с ненулевой дисперсией ($\gamma \neq 0$). Отсюда непосредственно следует существование двух пар положительных чисел A_{j1}, A_{j2} ($j = 1,2$), таких, что

$$P(A_{11} \leqslant Y_0 + Y_2 \leqslant A_{11} + 1) > 0; \qquad (7,1,23)$$

$$P(-A_{12} - 1 < Y_0 + Y_2 \leqslant -A_{12}) > 0; \qquad (7,1,24)$$

$$P(A_{21} \leqslant Z + Y_2 \leqslant A_{21} + 1) > 0; \qquad (7,1,25)$$

$$P(-A_{22} - 1 \leqslant Z + Y_2 \leqslant -A_{22}) > 0. \qquad (7,1,26)$$

При доказательстве леммы 4, сперва будем считать, что $x > 0$, тогда достаточно показать, что

$$u(x, 0) = O(e^x). \qquad (7,1,27)$$

Пусть это неверно; тогда найдется последовательность $x_j \to \infty$ такая, что

$$|u(x_j, 0)| > 3\lambda e^{x_j}. \qquad (7,1,28)$$

Здесь $u(x_j, 0)$ может быть положительной или отрицательной. Допустим сначала, что для бесконечной последовательности $\{t_j\}$, $t_j \to \infty$ чисел x_j, будет $u(t_j, 0) > 0$. Тогда с помощью (7,1,28) найдем оценку левой части (7,1,21) для достаточно больших t_j

$$\exp(2\gamma t_j^2 + \lambda e^{t_j} - u(t_j, 0)) < \exp(-\lambda e^{t_j}). \qquad (7,1,29)$$

Обращаясь к правой части (7,1,21) на основании (7,1,25) и (7,1,26), замечаем, что

$$E \exp t_j (Z + Y_2) > a_0 \exp (a_1 t_j) \tag{7,1,30}$$

(в дальнейшем a_i, ε_i — положительные константы). При $t_j \to \infty$ получаем противоречие с (7,1,29). Приходится допустить, что при $j \geqslant j_0$, $u(x_j, 0) < 0$. Тогда обращаемся в (7,1.22) и находим, пользуясь (7,1,28),

$$\exp (\gamma x_j^2 + \lambda e^{x_j} + u(x_j, 0)) < \exp (-\lambda e^{x_j}). \tag{7,1,31}$$

Но из (7,1,23) и (7,1,24) следует, что

$$E \exp x_j (Y_0 + Y_2) > a_0 \exp (a_1 x_j) \tag{7,1,32}$$

при $x_j \to \infty$ это противоречит (7,1,31). Этим доказано (7,1,27).

Пусть теперь $x < 0$. Тогда (7,1,9) вытекает из соотношения

$$u(x, 0) = O(x^2 + 1), \tag{7,1,33}$$

которое мы и будем доказывать. Пусть (7,1,33) неверно, и существует последовательность $x_j \to \infty$, таких, что

$$| u(-x_j, 0) | > 4\gamma x_j^2. \tag{7,1,34}$$

Сперва допустим, что для подпоследовательности $t_j \to \infty$ чисел x_j будет $u(-t_j, 0) > 0$. Из (7,1,34) находим оценку для правой части (7,1,21)

$$\exp (2\gamma t_j^2 + \lambda e^{-t_j} - u(-t_j, 0)) < \exp - \gamma t_j^2 \tag{7,1,35}$$

при $j \geqslant j_1$. Но (7,1,26) дает

$$E \exp (-t_j)(Z + Y_2) > a_0 \exp (a_1 t_j), \tag{7,1,36}$$

что противоречит (7,1,35) при больших t_j. Приходится допустить, что $u(-x_j, 0) < 0$ при $j \geqslant j_0$. Тогда обращаемся к (7,1,22) и из (7,1,34) находим

$$\exp (\gamma x_j^2 + \lambda e^{-x_j} + u(-x_j, 0)) < \exp (-\gamma x_j^2). \tag{7,1,37}$$

при $j \geqslant j_0$. Но (7,1,24) дает

$$E \exp (-x_j)(Y_0 + Y_2) > a_0 \exp a_1 x_j, \tag{7,1,38}$$

что противоречит (7,1,37) при больших x_j. Этим (7,1,33) и с присоединением (7,1,27) лемма 4 доказана.

Из леммы 4, (7,1,19), следует неравенство

$$| u(x, y) | = O(x^2 + y^2 + e^x). \tag{7,1,39}$$

Это — непосредственное следствие (7,1,16).

Зная теперь оценку $u(x, y) = \operatorname{Re} g(z)$, воспользуемся интегралом Пуассона 1.6.1 для оценки $v(x, y) = Ig(z)$.

Лемма 5

При $x > 0$ и любом $\varepsilon > 0$

$$v(x, y) = O(\exp|z|(1+\varepsilon)). \tag{7,1,40}$$

При $x \leqslant 0$

$$v(x, y) = O(|z|^3 + 1). \tag{7,1,41}$$

Сперва докажем (7,1,41). Для этого рассмотрим решетку целых точек (ξ, η) с $\xi \leqslant 0$. Докажем, что

$$v(\xi, 0) = O(|\xi|^3 + 1),\ \xi \leqslant 0. \tag{7,1,42}$$

В интеграле Пуассона 1.6.1 полагаем $x = \xi - 1$, $y = 0$, $x_1 = \xi$, $y_1 = 0$, $R = 4$, $1 \leqslant r = 2$. С помощью (7,1,39) находим

$$|v(\xi - 1, 0)| \leqslant |v(\xi, 0)| + a_2(\xi^2 + 1),$$

откуда

$$|v(\xi - 1, 0)| \leqslant a_3 + a_2 \sum_{\nu=1}^{|\xi|+1} (\nu^2 + 1) \leqslant a_4(|\xi|^3 + 1). \tag{7,1,43}$$

Это доказывает (7,1,42). Пусть теперь задано целое $\xi \leqslant 0$; рассматриваем точки (ξ, η) с целыми $\eta > 0$. В 1.6.1 полагаем $x_1 = \xi$; $y_1 = \eta$; $R = 4$; $1 \leqslant r \leqslant 2$. С помощью (7,1,39) находим

$$|v(\xi, \eta + 1)| \leqslant |v(\xi, \eta)| + a_2(\xi^2 + \eta^2 + 1). \tag{7,1,44}$$

откуда $|v(\xi, \eta + 1)| \leqslant |v(\xi, 0)| + a_2\xi^2(\eta + 1) + a_2 \sum\limits_{\nu=1}^{\eta+1} (\nu^2 + 1)$.

Учитывая (7,1,42), получаем

$$|v(\xi, \eta + 1)| \leqslant a_3(|\xi|^3 + |\eta|^3 + 1). \tag{7.1,45}$$

Аналогично действуем при $\eta < 0$. Это доказывает (7,1,41) для целых точек x, y с $x \leqslant 0$. Пусть (x, y) с $x \leqslant 0$ — любая точка, а (ξ, η) — ближайшая к ней целая точка, как одна из таковых. В 1,6,1 возьмем $x_1 = \xi$; $y_1 = \eta$; $R = 4$; $1 \leqslant r \leqslant 2$. Используя (7,1,39), находим

$$|v(x, y)| \leqslant |v(\xi, \eta)| + a_2(x^2 + y^2 + 1).$$

Так как (7,1,41) доказано для целых точек, то этим оно доказано вообще.

Перейдем к (7,1,40).

В 1,6,1 положим $z = x + iy = re^{i\psi}$, $R = r + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ сколь угодно мало). Имеем:

$$v(x, y) = v(0, 0) +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R\cos\varphi, R\sin\varphi) \frac{Rr\sin(\psi - \varphi)\, d\varphi}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2} \tag{7,1,46}$$

Из (7,1,39) видим, что

$$u(R\cos\varphi, R\sin\varphi) = O(e^{r(1+\varepsilon)}).$$

При этом (7,1,46) дает

$$v(x, y) = v(0, 0) + \frac{1}{\varepsilon^2} O(e^{r(1+\varepsilon)}).$$

Это и дает (7,1,40). Лемма 5 теперь доказана.

Объединяя (7,1,39) — (7,1,41), получаем лемму.

Лемма 6

При $x \leqslant 0$ имеем:

$$|g(z)| = O(|z|^3 + 1). \qquad (7,1,47)$$

При $x > 0$ и любом $\varepsilon > 0$ имеем:

$$|g(x)| = O(\exp|z|(1+\varepsilon)). \qquad (7,1,48)$$

§ 2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПАЛЕЙ — ВИНЕРА

Из (7,1,47) и (7,1,48) видно, что $g(z)$ экспонентного типа 1; имея в виду применение теоремы Палей — Винера 1.10.1 (точнее, ее усиления — теоремы 1.10.2), свяжем $g(z)$ со вспомогательной функцией $G(z)$, которая будет принадлежать L_2 на мнимой оси $x=0$. Составим новую целую функцию

$$H(z) = \frac{1}{z^4}\left(g(z) - g(0) - g'(0)z - g''(0)\frac{z^2}{2} - g'''(0)\frac{z^3}{6}\right). \qquad (7,2,1)$$

Очевидно, в силу (7,1,47), $H(iy) \in L_2(-\infty, \infty)$. Далее, $H(z)$ — функция экспонентного типа $\tau = 1$. Именно, в силу (7,1,47) и (7,1,48) имеем:

$$H(z) = O(1) \text{ при } x \leqslant 0; \; H(z) = O\exp|z|(1+\varepsilon)), \; x > 0. \qquad (7,2,2)$$

Так как $H(iy) \in L_2(-\infty, \infty)$, то можем применить теорему 1.10.2 (разумеется, с заменой реальной оси на мнимую). Получим [см. (1,10,29)]

$$H(z) = \int_0^1 e^{zt} f(t)\, dt, \qquad (7,2,3)$$

где $f(t) \in L_2(0,1)$. Из (7,2,1) находим

$$g(z) = z^4 \int_0^1 e^{zt} f(t)\, dt + P(z). \qquad (7,2,4)$$

где $P(z)$ — полином степени не выше 3.

Теперь нетрудно доказать лемму.

Лемма 7

$$g(z) = z^4 \int_0^1 \epsilon^{zt} f_1(t)\, dt + P_3(z), \qquad (7,2,5)$$

где $f_1(t)$ — реальная функция; $f_1(t) \in L_2(0, 1)$ и $P(z)$ имеет реальные коэффициенты и степень не выше 3.

Для доказательства положим в формуле (7,2,4) $z = x$ и учтем, что $g(x)$ — реально. Беря затем сопряженные значения и складывая, получим

$$g(x) = x^4 \int_0^1 e^{xt} \frac{f(t) + \overline{f(t)}}{2} dt + P_1(x), \tag{7,2,6}$$

где $P_1(x)$ имеет реальные коэффициенты. Так как справа и слева здесь стоят целые функции, то (7,2,6) верно при замене реальной переменной x на комплексную переменную z; при этом $f_1(t) = \frac{f(t) + \overline{f(t)}}{2}$ реальна, и $f_1(t) \in L_2(0, 1)$.

Нам выгоднее, однако, иметь представление $g(z)$ типа (7,2,5) с помощью функции, не только принадлежащей $L_2(0, 1)$, но и абсолютно непрерывной. Этого можно достигнуть, интегрируя по частям в (7,2,5). Имеем, полагая $\Phi_0(t) = \int_0^t f_1(u)\, du$,

$$\int_0^1 e^{zt} f_1(t)\, dt = \int_0^1 e^{zt} d\Phi_0(t) = e^z(\Phi_0(1) - \Phi_0(0)) - \\ - z\int_0^1 e^{zt}\Phi_0(t)\, dt. \tag{7,2,7}$$

Далее,

$$e^z(\Phi_0(1) - \Phi_0(0)) = zb_0 \int_0^1 e^{zt} dt + b_1 \tag{7,2,8}$$

(b_0, $b_1, \ldots$ в дальнейшем — некоторые константы).

Учитывая (7,2,7) и (7,2,8), а также то обстоятельство, что $\Phi_0(t)$ абсолютно непрерывна, приходим к лемме.

Лемма 8

$$g(z) = z^5 \int_0^1 e^{zt}\Phi(t)\, dt + P_4(z), \tag{7,2,9}$$

где $\Phi(t)$ — реальная абсолютно непрерывная функция, а $P_4(z) = P_3(z) + b_1$ — полином степени не выше 3 с реальными коэффициентами.

При этом $\Phi(t)$ и $P_4(t)$ понятным образом связаны с $f_1(t)$ и $P_3(z)$.

§ 3. ОСНОВНАЯ ЛЕММА И ОСНОВНОЙ ОПЕРАТОР

Пусть $h > 0$ — любое число, такое, что $t + 5h$ и t лежат в интервале (0,1). Составим пятую разность $\Phi(t)$

$$\Delta^5\Phi(t) = \Phi(t + 5h) - 5\Phi(t + 4h) + 10\Phi(t + 3h) - \\ - 10\Phi(t + 2h) + 5\Phi(t + h) - \Phi(t). \tag{7,3,1}$$

Целью всех дальнейших рассуждений будет доказать основную лемму.

Лемма 9

$$\Delta^5 \Phi(t) = 0. \tag{7,3,2}$$

Полагая

$$g_0(z) = g(z) - P_4(z), \tag{7,3,3}$$

найдем из (7,2,9)

$$g_0(z) = \int_0^1 \frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{zt}) \Phi(t)\, dt. \tag{7,3,4}$$

Пусть $\operatorname{Re} g_0(z) = u_0(x, y)$. Беря в (7,3,4) реальные части и учитывая реальность $\Phi(t)$, получим

$$u_0(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{xt} \cos yt) \Phi(t)\, dt. \tag{7,3,5}$$

Положим

$$P_4(z) = \sum_{\nu=0}^{4} \alpha_\nu z^{4-\nu}, \tag{7,3,6}$$

где α_ν — реальные числа. Исходя из (7,3,3), найдем оценку для

$$| u_0(x, 0) - u_0(x, 2\pi m) | \tag{7,3,7}$$

для $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Имеем:

$$u_0(x, y) = u(x, y) - (\alpha_0 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \alpha_1 (x^3 - 3xy^2) + \\ + \alpha^2 (x^2 - y^2) + \alpha_3 x + \alpha_4). \tag{7,3,8}$$

При $y = 2\pi m$, учитывая (7,1,18), найдем для любых $x \geqslant 0$:

$$| u_0(x, 0) - u_0(x, 2\pi m) | \leqslant a_4 x^2 m^2 + a_5 x m^2 + a_6 m^4. \tag{7,3,9}$$

В дальнейшем $A_1(x), A_2(x), \ldots$ будет обозначать положительные функции x, выбор которых будет уточнен в дальнейшем. Пусть, далее, $\{\gamma_m\}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ — набор реальных чисел, вообще говоря, зависящих от заданного $x > 1$, под условием

$$|\gamma_m| < \frac{A_1(x)}{(m+1)^{20}}; \tag{7,3,10}$$

Составим четный ряд Фурье

$$\Lambda(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos 2\pi m t, \tag{7,3,11}$$

В правой части (7,3,5) при заданном x будем полагать $y = 2\pi m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, умножать на γ_m и складывать. В силу (7,3,10) законно это делать под знаком интеграла (в 7,3,5).

Полученный результат обозначим $F(\Lambda, u_0)$. Имеем (в силу 7,3,10):

$$F(\Lambda, u_0) = \int_0^1 \frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x))\Phi(t)\,dt. \qquad (7,3,12)$$

$F(\Lambda, u_0)$ будет нашим основным оператором над $u_0(x, y)$.

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАТОРА $F(\Lambda, u_0)$

Формально мы имеем:

$$F(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m u_0(x, 2\pi m). \qquad (7,4,1)$$

Покажем, что для всех значений $x \geqslant 0$ наш ряд будет абсолютно сходящимся. Имеем:

$$F(\Lambda, u_0) = u_0(x, 0)\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m + F_1(\Lambda, u_0), \qquad (7,4,2)$$

где

$$F_1(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m(u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)). \qquad (7,4,3)$$

Далее,

$$|F_1(\Lambda, u_0)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty}|\gamma_m||u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)| <$$

$$< a_7(x^2+1)A_1(x)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^4}{(m+1)^{20}}.$$

Отсюда

$$|F_1(\Lambda, u_0)| < a_8(\alpha^2+1)A_1(x), \qquad (7,4,4)$$

чем доказана абсолютная сходимость ряда (7,4,1). Оценка (7,4,4) будет нам нужна в дальнейшем.

Вернемся к основной формуле (7,3.12). Основываясь на свойствах $F(\Lambda, u_0)$ и учитывая оценку (7,3,9), будем постепенно строить доказательство основной лемме 9.

Пусть $U(t, x)$ — непрерывная при каждом $x \geqslant 0$ функция t, заданная при $t \in [0, 1]$. При заданном x частным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Gamma(t, x)) = e^{xt}U(t, x) \qquad (7,4,5)$$

будет, как нетрудно проверить,

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{24}\int_0^t e^{x(v-t)}(t-v)^4 U(v, x)\,dv. \qquad (7,4,6)$$

Пусть $h > 0$ таково, что числа t и $t+5h$ лежат в интервале $(0,1)$. Составим пятую разность $\Delta^5\Phi(t)$ (см. 7,3,1).

Имеем из (7,4,6) $\Gamma(0, x) = 0$. Для дальнейшего важно также поведение

$$\Gamma(1+x) = \frac{1}{24}\int_0^1 e^{x(v-1)}(1-v)^4 U(v, x)\,dv =$$

$$= \frac{1}{24} e^{-x}\int_0^1 e^{xv}(1-v)^4 U(v, x)\,dv. \qquad (7,4,7)$$

Пусть $W(\xi)$ — непрерывная функция, причем $W(\xi) = 0$ при $|\xi| \geqslant \xi_0$, где ξ_0 выбрано под условием

$$\xi_0 \leqslant \frac{h}{100}. \qquad (7,4,8)$$

Пусть h таково, что при $j = 0, 1, \ldots, 5$:

$$[t_0 + jh - \xi_0,\ t_0 + jh - \xi_0] \subset (0, 1). \qquad (7,4,9)$$

Теперь при заданном t_0 выберем функцию $U(v, x) = U(v, x, t_0)$ в виде

$$U(v, x, t_0) = W(v - t_0 - 5h) - 5e^{xh}W(v - t_0 - 4h) + \\ + 10e^{2xh}W(v - t_0 - 3h) - 10e^{3xh}W(v - t_0 - 2h) + \\ + 5e^{4xh}W(v - t_0 - h) - e^{5xh}W(v - t_0). \qquad (7,4,10)$$

Лемма 10

При выборе $U(v, x) = U(v, x, t_0)$ в (7,4,7) имеем:

$$\Gamma(1, x) = 0. \qquad (7,4,11)$$

Для доказательства нужно обнаружить, что

$$\int_0^1 e^{xv}(1-v)^4 U(v, x, t_0)\,dv = 0. \qquad (7,4,12)$$

Имеем при $j = 0, 1, \ldots, 5$:

$$\int_0^1 e^{xv}(1-v)^4 W(v - t_0 - jh)\,dv =$$

$$= \exp x(t_0 + jh)\int_{-\xi_0}^{\xi_0}(1 - t_0 - jh - \xi)^4 W(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда, используя (7,4,10), непосредственно приходим к (7,4,12). Впредь будем рассматривать $\Gamma(t, x)$, задаваемое формулой (7,4,6), где $U(v, x) = U(v, x, t_0)$ задается (7,4,10). Тогда будем иметь:

$$\Gamma(0, x) = \Gamma(1, x) = 0 \qquad (7,4,13)$$

при всех $x > 0$.

Пусть t_0, h, ξ_0 таковы, что

$$t_0 \pm (5h + \xi_0) \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right) \tag{7,4,14}$$

$\left(\text{так что } t_0 > \frac{1}{2}\right)$. По данному t_0 построим функцию $U(v, x, t_0)$, согласно (7,4,10). Мы видим, что

$$U(v, x, t_0) = 0 \quad \text{при} \quad v \leqslant \frac{1}{2}, \tag{7,4,15}$$

так что, согласно (7,4,6).

$$\Gamma(t, x) = 0 \quad \text{при } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \tag{7,4,16}$$

Введем теперь функцию

$$\Lambda(t, x) = \Gamma(t, x) + \Gamma(1 - t, x). \tag{7,4,17}$$

Это четная функция t при каждом x. Далее, в силу (7,4,13)

$$\Lambda(0, x) = \Lambda(1, x) = 0 \tag{7,4,18}$$

при всех $x > 0$. Ввиду (7,4,16) имеем:

$$\Lambda(t, x) = \Gamma(t, x) \text{ при } t \in \left[\frac{1}{2},\ 1\right];$$

$$\Lambda(t, x) = \Gamma(1 - t, x) \quad \text{при} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \tag{7,4,19}$$

Рассмотрим действие оператора $\frac{\partial^5}{\partial t^5}$ на функцию $e^{xt}\Lambda(t, x)$. При $t \in \left[\frac{1}{2},\ 1\right]$ имеем из (7,4,19) и (7,4,5)

$$\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x)) = e^{xt}U(t, x, t_0) \quad \text{при} \quad t \in \left[\frac{1}{2},\ 1\right]. \tag{7,4,20}$$

Нам нужно выяснить действие $\frac{\partial^5}{\partial t^5}$ при $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Имеем из (7,4,6):

$$\Gamma(1 - t, x) = \frac{1}{24}\int\limits_0^{1-t} e^{x(v-1+t)}(1 - t - v)^4 U(v, x, t_0)\, dx =$$

$$= \frac{1}{24} e^{x(t-1)} \int\limits_0^{1-t} e^{xv}(1 - t - v)^4 U(v, x, t_0)\, dv. \tag{7,4,21}$$

Таким образом, при $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, в силу (7,4,19),

$$e^{xt}\Lambda(t, x) = \frac{1}{24} e^{x(2t-1)} \int\limits_0^{1-t} e^{xv}(1 - t - v)^4 U(v, x, t_0)\, dv. \tag{7,4,22}$$

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ЛЕММЫ И. М. ВИНОГРАДОВА

Нам нужно теперь получить оценку для $\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x))$ при $t_0 \pm (5h + \xi_0) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. При этом будем применять лемму И. М. Виноградова (из § 4, гл. I). При определении $U(v, x, t_0)$ в (7,4,10) будем считать $W(\xi)$ заданной в виде „стаканчика И. М. Виноградова“, выбранного так, что

$$0 \leqslant W(\xi) \leqslant 1; \; W(\xi) = 0 \text{ при } |\xi| > \xi_0, \; |\xi| \leqslant 1.$$

При этом в лемме И. М. Виноградова заменим t на $\frac{t}{2}$, так что получится период 2. Далее мы конкретизируем выбор $W(\xi)$. Применим оператор $\frac{\partial^5}{\partial t^5}$ к (7,4,22) $\left(\text{при } t < \frac{1}{2}\right)$; видим, что результат состоит из ограниченного числа членов вида

$$ae^{x(2t-1)}x^{\nu} \int_0^{1-t} e^{xv}(1 - t - v)^{\mu} U(v, x, t_0)\,dv \qquad (7,5,1)$$

или

$$a'e^{x(2t-1)}x^{\nu}e^{x(1-t)}U(1 - t, x, t_0), \qquad (7,5,2)$$

где a, a' — константы; $0 \leqslant \nu \leqslant 5$; $0 \leqslant \eta \leqslant 4$.

Лемма 11

При $x \geqslant 1$, $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$; $t_0 \pm (5h + \xi_0) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\left|\frac{\partial^5}{\partial t^5} e^{xt}\Lambda(t, x)\right| \leqslant a_9 x^5 \exp(1 - t_0 + 5h + 3\xi_0)\,x. \qquad (7,5,3)$$

Мы видим, что $U(v, x, t_0) = 0$ при v, не принадлежащих к системе сегментов,

$$[t_0 + jh - \xi_0, \; t_0 + jh + \xi_0]; \; j = 0, 1, \ldots, 5. \qquad (7,5,4)$$

Учитывая это, получаем для (7,5,2) оценку $(x \geqslant 1)$

$$|a'x^{\nu}e^{xt}U(1 - t; x, t_0)| \leqslant |a'|x^5 \max_{0<j<5} \exp x(1 - t_0 - jh + \xi_0 + 5h) \leqslant$$
$$\leqslant a_{10}x^5 \exp(1 - t_0 + 5h + \xi_0).$$

Теперь обращаемся к (7,5,1). Ввиду свойств $U(v, t, x_0)$, при $1 - t < t_0 - \xi_0$, $t > 1 - t_0 + \xi_0$, интеграл в (7,5,1) равен 0, так что для (7,5,1) получаем оценку (см. (7,4,10))

$$|a|x^5 \exp x\,[2(1 - t_0 + \xi_0) - 1] \exp x(1 - t_0 + \xi_0) \exp 5xh =$$
$$= |a|x^5 \exp x(2 - 3t_0 + 5h + 3\xi_0).$$

Так как $t_0 > \frac{1}{2}$, то $2 - 3t_0 < 1 - t_0$, так что две полученных оценки можно объединить в (7,5,3).

Конкретизируем теперь выбор „стаканчика И. М. Виноградова“ $W(\xi)$.

Будем считать, при заданных t_0, h, $\xi_0=\xi_0(t_0, x)$, заданной функцию x под условием (7,4,8). В лемме И. М. Виноградова (§ 4, гл. 1) возьмем $r=20$, $\Delta=\frac{\xi_0}{100}$, $\alpha=0{,}5\Delta$, $\beta=\xi_0-0{,}5\Delta$, период 2. Согласно лемме § 4 гл. I [оценка (1,4,5)], получим при $\nu\leqslant 18$

$$|W^{(\nu)}(\xi)|\leqslant a_{11}\xi_0^{-18}. \tag{7,5,5}$$

При данном t_0 ξ_0 зависит от x; далее эта зависимость будет конкретизирована. Полагая

$$\xi_0^{-18}=A_0(x), \tag{7,5,6}$$

найдем

$$|W^{(\nu)}(\xi)|\leqslant a_{11}A_0(x)\ (x\geqslant 1,\ \nu\leqslant 18). \tag{7,5,7}$$

Нам нужно получить оценку для коэффициентов разложения в ряд Фурье функции $\Gamma(t, x)$.

Лемма 12

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}\Gamma(t, x)\right|< a_{12}x^{18}A_0(x)e^{5xh},\ 0\leqslant\nu\leqslant 18. \tag{7,5,8}$$

Согласно (7,4,6) имеем: $\Gamma(t, x)=\Gamma(1, x)$ при $t>t_0+5h+\xi_0$, ибо $U(v, x, t_0)=0$ при $v\geqslant t_0+4h+\xi_0$. Далее, $\Gamma(t, x)=\Gamma(0, x)$ при $t<t_0-\xi_0$, ибо $U(v, x, t_0)=0$ при $0<t_0-\xi_0$. Итак, на сегменте $[0, 1]$ $\Gamma(t, x)$ равна 0 в некоторой окрестности точек 0 и 1, во всех же внутренних точках, т. е. при $t\in(0, 1)$, непосредственно дифференцируя (7,4,6) по t, оценивая слагаемые и применяя (7,5,7), найдем

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}\Gamma(t, x)\right|\leqslant a_{12}x^{18}A_0(x)e^{5xh},$$

что совпадает с (7,5,8).

Лемма 13

При разложении в ряд Фурье на сегменте $[0, 1]$

$$\Gamma(t, x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\cos 2\pi mt+b_m\sin 2\pi mt \tag{7,5,9}$$

имеем оценки:

$$|a_m|+|b_m|<\frac{a_{13}x^{18}A_0(x)e^{5xh}}{(m+1)^{16}}. \tag{7,5,10}$$

Функция $\Gamma(t, x)$ равна 0 в окрестности $t=0$ и $t=1$ на $[0, 1]$; внутри $[0, 1]$, т. е. в интервале $(0, 1)$, имеют место оценки (7,5,8).

На основании этого, (7,5,10) следует из известных теорем теории рядов Фурье (см., например, [38], т. 3, стр. 605, 606).

Из (7,5,10) следуют оценки для

$$\Lambda(t, x) = \Gamma(t, x) + \Gamma(1-t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos 2\pi m t, \qquad (7,5,11)$$

$$|\gamma_m| < \frac{a_{14} x^{18} A_0(x) e^{5xh}}{(m+1)^{16}}. \qquad (7,5,12)$$

Очевидно, $\gamma_m = 2a_m$, и оценка следует из (7,5,10).

Далее, весьма важно отметить, что, в силу

$$\Lambda(0, x) = \Lambda(1, x) = 0,$$

имеем весьма важное равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m = \frac{\Lambda(0, x) + \Lambda(1, x)}{2} = 0. \qquad (7,5,13)$$

§ 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ ДЛЯ $t > \frac{1}{2}$

В силу (7,5,13) и (7,4,2) имеем:

$$F(\Lambda, u_0) = F_1(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)). \qquad (7,6,1)$$

Отсюда, в силу (7,5,12) и (7,3,9), выводим при $x \geqslant 1$

$$|F(\Lambda, u_0)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| \, |u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{14} x^{18} A_0(x) e^{5xh}}{(m+1)^{16}} a_{15} x^2 m^4 < a_{16} x^{20} A_0(x) e^{5xh}. \qquad (7,6,2)$$

Вернемся теперь к формуле (7,3,12). Положим

$$I_{1/2} = \int_0^{1/2} \frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t)\, dt; \qquad (7,6,3)$$

$$I_1 = \int_{1/2}^{1} \frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t)\, dt. \qquad (7,6,4)$$

Из (7,3,12) находим

$$F(\Lambda, u_0) = I_{1/2} + I_1.$$

По лемме 11 (7,5,3) находим

$$|I_{1/2}| \leqslant a_9 x^5 \exp(1 - t_0 + 5h + 3\xi_0) x \int_0^1 |\Phi(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant a_{17} x^4 \exp(1 - t_0 + 5h + 3\xi_0) x. \qquad (7,6,5)$$

Теперь обратимся к I_1. В силу (7,4,20) имеем:

$$I_1 = \int_{1/2}^{1} e^{xv} U(v, x, t_0)\,\Phi(v)\,dv. \qquad (7,6,6)$$

Функция $U(v, x, t_0)$ выражается формулой (7,4,10). Имеем ($0 \leqslant j \leqslant 5$):

$$\int_{1/2}^{1} e^{(5-j)xh} W(v-t_0-jh)\,e^{xh}\Phi(v)\,dv =$$

$$= \int_{v=t_0+jh-\xi_0}^{v=t_0+jh+\xi_0} \exp x(v+(5-j)h) \times$$

$$\times W(v-t_0-jh)\,\Phi(v)\,dv =$$

$$= \exp(t_0+5h)x \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi)\,\Phi(t_0+jh+\xi)\,d\xi.$$

В силу (7,4,10) имеем отсюда:

$$I_1 = \exp(t_0+5h)x \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi)\,F(t_0+\xi)\,d\xi, \qquad (7,6,7)$$

где

$$F(t_0+\xi) = \Delta^5\Phi(t_0+\xi) \qquad (7,6,8)$$

при заданном значении h.

Мы можем теперь доказать, что

$$F(t_0) = 0, \qquad (7,6,9)$$

если $t_0 \pm 5{,}01h \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$.

Пусть это последнее условие выполнено. Зададим $\varepsilon > 0$, которое фиксируем в дальнейшем, и для непрерывной функции $F(t_0+\xi)$ выберем $u_0 = u_0(t_0, \varepsilon)$ столь малым, что

$$|F(t_0+u) - F(t_0)| < \varepsilon \text{ при } 0 \leqslant u < u_0(t_0, \varepsilon). \qquad (7,6,10)$$

При определении „стаканчика И. М. Виноградова“ $W(\xi)$ в § 5, при заданном $x \geqslant 1$, положим

$$\xi_0 = \min\left(u_0(t_0, \varepsilon), \frac{1}{x^2}\right). \qquad (7,6,11)$$

Займемся оценкой I_1 снизу (см. (7,6,7)). Согласно (7,6,10) имеем:

$$\exp(t_0+5h)x \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi)\,|F(t_0+\xi) - F(t_0)|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon\xi_0 \exp(t_0+5h)x, \qquad (7,6,12)$$

ибо $e^{\xi x} \leqslant e^{\frac{1}{x}} = O(1)$, в силу (7,6,11), и $0 \leqslant W(\xi) \leqslant 1$.

Далее, ввиду того, что

$$\int_{-\xi_0}^{\xi_0} W(\xi)\,d\xi > \frac{\xi_0}{2}, \tag{7,6,13}$$

имеем:

$$\exp(t_0+5h)\,x\left|\int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi r}W(\xi)F(t_0)\,d\xi\right| >$$

$$> \frac{\xi_0}{2}\,|F(t_0)|\exp(t_0+5h)\,x. \tag{7,6,14}$$

Сравнивая с (7,6,12), видим, что при $\varepsilon < \frac{1}{8}$

$$|I_1| > \frac{\xi_0}{4}\,|F(t_0)|\exp(t_0+5h)\,x. \tag{7,6,15}$$

Для $|I_{1/2}|$ найдем оценку сверху. Согласно (7,6,5),

$$|I_{1/2}| \leqslant a_{17}x^4\exp(1-t_0+5h+3\xi_0)\,x.$$

Далее, $t_0 > \frac{1}{2}$, так что $1-t_0 < t_0$. Выберем x столь большим, чтобы было, соответственно (7,6,11), $\xi_0 = \frac{1}{x^2}$. Далее, пусть $F(t_0) \neq 0$. Выберем x еще столь большим, чтобы

$$\frac{1}{4x^2}|F(t_0)|\exp(t_0+5h)\,x > 2a_{17}x^4(1-t_0+5h+3\xi_0)\,x \tag{7,6,16}$$

(что предполагает, в случае нужды, еще достаточную малость h).

Из (7,6,15) и (7,6,16) находим

$$|F(\Lambda,\ u_0)| = |I_{1/2}+I_1| > \frac{1}{8}|F(t_0)|\,x^{-2}\exp(t_0+5h)\,x. \tag{7,6,17}$$

С другой стороны, оценим $|F(\Lambda,\ u_0)|$ сверху. Имеем по (7,6,2)

$$|F(\Lambda,\ u_0)| < a_{16}x^{20}A_0(x)\,e^{5xh}.$$

При этом, согласно (7,5,6), $A_0(x) = \xi_0^{18} = x^{36}$, так что

$$|F(\Lambda,\ u_0)| < a_{16}x^{56}\exp(5xh). \tag{7,6,18}$$

При $x \to \infty$ это может совмещаться с (7,6,17), только если $F(t_0) = 0$, что и требовалось вывести.

Это доказывает основную лемму 9 для $t \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ (при t близких к $\frac{1}{2}$ и 1, приращения h должны быть соответственно малы).

Прежде, чем перейти к интервалу $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, выведем некоторые простые следствия.

§ 7. ВЫЯСНЕНИЕ ПОВЕДЕНИЯ $\Phi(t)$ ПРИ $t > \frac{1}{2}$

Лемма 14

При $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ $\Phi(t)$ полином степени не выше 4

$$\Phi(t) = P_4^{(0)}(t). \tag{7,7,1}$$

Мы имеем во всяком сегменте $[a, b] \subset \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, при достаточно малом h, $\Delta^5\Phi(t) = 0$. Разделим сегмент $[a, b]$ на N равных частей, где $h = \frac{b-a}{N}$ достаточно мало. Пусть точки деления суть $\alpha_0 = a, \alpha_1, \ldots, \alpha_N = b$. Возьмем полином четвертой степени $Q(t)$ (скажем, интерполяционный полином Лагранжа, совпадающий с $\Phi(t)$ при $t = \alpha_0, \ldots, \alpha_4$). Заменим $\Phi(t)$ на $\psi(t) = \Phi(t) - Q(t)$, тогда $\Delta^5\psi(t) = 0$, и легко находим, что

$$\Phi(\alpha_i) = P_4^{(0)}(\alpha_i).$$

Возьмем наряду со старыми точками деления новые $\frac{\alpha_j + \alpha_{j+1}}{2} = \alpha_j'$. Определим новый полином четвертой степени, совпадающий с $\psi(\tau)$ в точках $\alpha_0, \alpha_0', \alpha_1, \alpha_1'$. Тогда он должен совпадать с $\psi(\tau)$ во всех точках α_i, α_i^1 и, так как $\psi(\alpha_1) = 0$, он должен быть тождественно равен 0 и $\psi(\alpha_1') = 0$. Снова вводим новые точки деления, вставляя их посередине между старыми. Рассуждая так далее, находим, что $\psi(\tau) = 0$ на всюду плотном множестве точек, и, в силу ее непрерывности, всюду на $[a, b]$, так что $\Phi(t) = Q(t) = P_4^{(0)}(t)$ — полином степени не выше 4.

§ 8. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВЕДЕНИЯ О $g(z)$

Согласно лемме 8 (7,2,9) и 14 (8,7,2) имеем теперь:

$$g(z) = P_4(z) + z^5 T_{1/2}(z) + z^5 T_1(z), \tag{7,8,1}$$

где

$$T_{1/2}(z) = \int_0^{1/2} e^{zt}\Phi(t)\,dt;$$

$$T_1(z) = \int_{1/2}^{1} e^{zt}(\alpha_0 t^3 + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3)\,dt. \tag{7,8,2}$$

Прямым вычислением находим

$$z^5 T_1(z) = e^z(\beta_0 z^4 + \beta_1 z^3 + \beta_2 z + \beta_4) + \\ + e^{z/2}(\gamma_0 z^4 + \gamma_1 z^3 + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z + \gamma_4), \tag{7,8,3}$$

где β_i, γ_i — реальные константы.

Лемма 15

В выражении (7,8,3)

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0. \tag{7,8,4}$$

Из (7,8,1) и (7,8,3) имеем при $x \geqslant 1$:

$$g(z) = e^z(\beta_0 z^4 + \beta_1 z^3 + \beta_2 z^3 + \beta_3 z + \beta_4) + O(|h|^4 e^{x/2}). \tag{7,8,5}$$

Отсюда при $z = x$, беря реальные части, найдем

$$u(x, 0) = e^x(\beta_0 x^4 + \beta_1 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x + \beta_4) + O(x^4 e^{x/2}). \tag{7,8,6}$$

Пусть $\beta_0 > 0$. Тогда при $x \to \infty$

$$\exp(2\gamma x^2 + \lambda e^x - u(x, 0)) = O\left(\exp - \frac{\beta_0}{4} x^4 e^x\right).$$

Сопоставляя с (7,1,21) и (7,1,25), видим, что получается противоречие. Если $\beta_0 < 0$, то получаем противоречие между (7,1,22) и (7,1,23). Значит, $\beta_0 = 0$. Совершенно так же получаем, что $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, что и доказывает (7,8,4).

Лемма 16

Существует такой полином $Q(t)$ степени $\leqslant 4$, что

$$z^5 \int_0^{1/2} e^{zt} Q'(t)\, dt = e^{z/2}(\gamma_0 z^4 + \gamma_1 z^3 + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z + \gamma_4) + \gamma_5. \tag{7,8,7}$$

Для доказательства этой леммы достаточно рассмотреть интегралы вида

$$z^5 \int_0^{1/2} e^{zt} t^m dt \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Они получаются из $z^5 \int_0^{1/2} e^{zt} dt = e^{zt} z^4 \Big|_0^{1/2}$

Полагая $\Phi(t) + Q(t) = \Phi_1(t)$, $P_4(z) + \gamma_5 = P(z)$,

$$g_1(z) = g(z) - \beta_0 e^z - P(z), \tag{7,8,8}$$

находим

$$g_1(z) = z^5 \int_0^{1/2} e^{zt} \Phi_1(t)\, dt, \tag{7,8,9}$$

где $\Phi_1(t)$ — абсолютно непрерывная функция.

Здесь $g_1(z) = u_1(x, y) + iv(x, y)$ — целая функция, ведущая себя совершенно так же, как $g(z)$. Она реальна на реальной оси.

Для функции $E(z) = \beta_0 e^z$ имеем $E(\alpha + 2\pi i m) = E(x)$ для целых m. Ввиду этого, учитывая (7,3,9), найдем при $x \geqslant 1$ и целых m

$$|u_1(x, 0) - u_1(x, 2\pi m)| < a_{17} x^2 m^4. \tag{7,8,10}$$

Поэтому мы можем действовать, как ранее. При подходящей $\Lambda(t, x)$, периодической при каждом значении x по t с периодом 1, четной и имеющей достаточно быстро сходящийся ряд Фурье, составим, как в (7,3,12), равенство

$$F(\Lambda, u_1) = \int_0^1 \frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{xt}\Lambda(t, x))\,\Phi_1(t)\,dt. \tag{7,8,11}$$

По формуле (7,4,10) составляем функцию $U(v, x, t_0)$, где

$$t_0 \pm (5h + \xi_0) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \tag{7,8,12}$$

и

$$\Gamma_1(t, x) = \frac{1}{24} \int_0^t e^{x(v-t)} (t-v)^4 U(v, x, t_0)\,dv. \tag{7,8,13}$$

Тогда получим

$$\Gamma_1(0, x) = \Gamma(1, x) = 0, \tag{7,8,14}$$

$\Gamma_1(t, x) = 0$ в окрестности $t = 0$ (при заданном x) и не изменяется, пока $t = t_0 + 5h + \xi_0$, так что $\Gamma_1(t, x) = 0$ при $t > t_0 + 5h + \xi_0$, в частности, в окрестности $t = 1$.

Составляем

$$\Lambda(t, x) = \Gamma_1(t, x) + \Gamma_1(1 - t, x). \tag{7,8,15}$$

В силу (7,8,12) имеем: $\Gamma_1(1 - t, x) = 0$ при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и

$$\Lambda(t, x) = \Gamma_1(t, x) \text{ при } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \tag{7,8,16}$$

Это сильно облегчает дело. Из (7,8,16) имеем при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$\frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{xt}\Lambda(t, x)) = \frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{xt}\Gamma_1(t, x)) = e^{xt}U(t, x, t_0), \tag{7,8,17}$$

откуда

$$E(\Lambda, u_1) = \int_0^{1/2} e^{xv} U(v, x, t_0)\,\Phi_1(v)\,dx, \tag{7,8,18}$$

как и ранее, приходим к выводу, что при $[a, b] \subset \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $h \leqslant h_0(a, b)$ заданном имеем:

$$\Delta^5 \Phi_1(t) = 0. \tag{7,8,19}$$

Но $\Phi_1(t) = \Phi(t) + Q(t)$, где $Q(t)$ — полином степени не выше 4, так что $\Delta^5 Q(t) = 0$, и из (7,8,19) $\Delta^5 \Phi(t) = 0$.

Ввиду этого

$$\Phi(t) = Q_4(t), \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \tag{7,8,20}$$

где $Q_4(t)$ — полином степени не выше 4. Подставляя в (7,8,8), находим непосредственно

$$g(z) = P(z) + \beta_0 e^z + e^{z/2}(\alpha_0 z^4 + \alpha_1 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z + \alpha_4). \tag{7,8,21}$$

Лемма 17

В выражении (7,8,21) $\alpha_0=\alpha_1=\ldots=\alpha_4=0$ имеем:

$$g_1(z)=e^{z/2}(\alpha_0z^4+\alpha_1z^3+\alpha_2z^2-\alpha_3z+\alpha_4). \quad (7,8,22)$$

При этом должно соблюдаться неравенство (7,8,10). Имеем при нечетном m:

$$u_1(x,\ 0)-u_1(x,\ 2m\pi)=e^{x/2}(\alpha_0x^4+\alpha_1x^3+\alpha_2x^2+\alpha_3x+\alpha_4)+$$
$$+e^{x/2}(\alpha_0(x^4+24\pi^2m^2x^2+16\pi^4m^4)+\alpha_1(x^3-12\pi^2m^2x)+$$
$$+\alpha_2(x^2-4m^2\pi^2)+\alpha_3x+\alpha_4. \quad (7,8,23)$$

При $x\to\infty$, сравнивая с (7,8,10), находим последовательно $\alpha_0=0$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=0$. Итак,

$$g(z)=\beta_0e^z+P(z). \quad (7,8,24)$$

§ 9. ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ ВЫВОД. ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Лемма 18

В выражении (7,8,24) $\beta_0\geqslant 0$ и $P(z)$ — полином степени не выше 2.

Будем действовать, как в § 1. Допустим, что $\beta_0<0$. Имеем:

$$\exp g(z)=E\exp(zY_1). \quad (7,9,1)$$

Пусть V независимая от Y_1 случайная величина, — такая, что

$$E\exp(zV)=e^{z^2}. \quad (7,9,2)$$

Тогда

$$\exp(x^2+\beta_0e^x+P(x))=E\exp x(Y_1+V), \quad (7,9,3)$$

Как в (7,1,23), убеждаемся, что при $x\geqslant 1$

$$E\exp x(Y_1+Y)\geqslant a_0e^{a_1x} \quad (7,9,4)$$

Но если $\beta_0<0$, то при $x\to\infty$ левая часть (7,9,3) стремится к 0, что противоречит (7,9,4). Итак, $\beta_0\geqslant 0$.

Пусть $P(z)=\gamma_0z^4+\gamma_1z^3+\gamma_2z^2+\gamma_3z+\gamma_4$. Докажем, что

$$\gamma_0=\gamma_1=0,\ \gamma_2\geqslant 0. \quad (7,9,5)$$

Рассмотрим

$$u(x,\ y)=\operatorname{Re}g(z)=\beta_0e^x\cos y+\gamma_0(x^4-6x^2y^2+y^4)+$$
$$+\gamma_1(x^3-3xy^2)+\gamma_2(x^2-y^2)+\gamma_3x+\gamma_4. \quad (7,9,6)$$

Мы должны иметь при любых x, y:

$$u(x,\ 0)\geqslant u(x,\ y). \quad (7,9,7)$$

Пусть $y=2m\pi$; m — целое. Имеем при $x=0$:

$$u(x,\ 0)-u(x,\ 2m\pi)=-\gamma_0(2m\pi)^4.$$

Итак, $\gamma_0\leqslant 0$.

Положим $x^2 = 3(2m\pi)^2$. Тогда, при $m \to \infty$

$$u(x, 0) - u(x, 2m\pi) = \gamma_0 17 (2m\pi)^4 + O(m^2).$$

Откуда $\gamma_0 \geqslant 0$, так что $\gamma_0 = 0$. В таком случае
$u(x, 0) - u(x, 2m\pi) = 3\gamma_1 x (2m\pi)^2 + \gamma_2 (2m\pi)^2$.

Если $\gamma_1 > 0$, то при $x \to -\infty$, $m = 1$ получаем противоречие с (7,9,7). Если $\gamma_1 < 0$, то при $x \to \infty$ $m = 1$ получаем такое же противоречие. Итак, $\gamma_1 = 0$, и тогда (7,9,7) дает $\gamma_2 \geqslant 0$.

Переобозначим в (7,8,24) β_0 в λ_0; имеем:

$$g(z) = \lambda_0 e^z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z + \gamma_4.$$

Мы должны иметь $g(0) = 0$, так что $\gamma_4 = -\lambda_0$ и

$$g(z) = \lambda_0 (e^z - 1) + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z; \ \gamma_2 \geqslant 0, \ \lambda_0 \geqslant 0. \tag{7,9,8}$$

Итак, Y_1 есть композиция законов Пуассона и Гаусса, быть может, вырождающихся при $\lambda_0 = 0$ или $\gamma_2 = 0$. Очевидно, то же касается компоненты Y_2. Если для Y_2 имеем:

$$g_2(z) = \ln \varphi_2(z) = \lambda_0' (e^z - 1) + \gamma_2' z^2 + \gamma_3' z, \tag{7,9,9}$$

то из теоремы 6.1.1 об однозначности представления логарифма х. ф. б. д. з. формулой Леви — Хинчина, вытекает, что $\lambda_0 + \lambda_0' = \lambda$, $\gamma_2' + \gamma_2 = \gamma$ (см. (7,1,9)), что и доказывает утверждение о сложении дисперсий в теореме 7.1.1.

Остается рассмотреть предельный случай $\lambda = 0$ и $\gamma = 0$, т. е. случай теорем Д. А. Райкова и Г. Крамера.

Пусть X — пуассонова случайная величина и $X = Y_1 + Y_2$, где Y_1 и Y_2 независимы. Пусть Z нормально с дисперсией δ и независимо от (Y_1, Y_2) (и, стало быть, от X). Имеем:

$$Z + X = Z + Y_1 + Y_2.$$

По нашей теореме $Y_2 = Y_{21} + Y_{22}$, где $D(Y_{21}) \leqslant \delta$ и Y_{22} — пуассонова величина. При $\delta \to 0$ получаем, что Y_2 — пуассонова; точно так же доказываем, что Y_1 — пуассонова величина.

Замена слов „пуассонов" на „гауссов" и обратно дает и теорему Г. Крамера.

Глава восьмая

БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ ЗАКОНЫ С ГАУССОВОЙ КОМПОНЕНТОЙ. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ К I_0

Мы переходим теперь к общим теоремам о безгранично делимых законах, имеющих Гауссову компоненту и принадлежащих I_0, т. е. имеющих только безгранично делимые компоненты. В формуле П. Леви [см. (0,2,8)] для логарифма х. ф. б. д. з.,

$$\ln\varphi(t)=\beta it-\gamma t^2+\int\limits_{-\infty}^{0}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dM(u)+$$
$$+\int\limits_{0}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dN(u), \qquad (8,0,1)$$

где $M(-\infty)=N(\infty)=0$; $\gamma\geqslant 0$; $\int\limits_{-a}^{0}u^2dM(u)+\int\limits_{0}^{a}u^2dN(u)<\infty$ (a — конечно);

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{0}u^2dM(u)+\int\limits_{0}^{\varepsilon}u^2dN(u)\to 0 \quad \text{при } \varepsilon\to 0. \qquad (8,0,2)$$

Если в представлении (8,0,1) $\gamma>0$, то будем говорить, что соответствующий з. р. F имеет гауссову компоненту, очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы было

$$F=G*F_1,$$

где G — невырожденный нормальный з. р., а F_1 — б. д. з.

§ 1. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Функции $M(u)$ и $N(u)$ в формуле (8,0,1) будем называть спектральными, спектром или пуассоновым спектром соответствующего б. д. з.; при этом $N(u)$ — спектром положительных, а $M(u)$ — спектром отрицательных частот. Если $dN(u)=0$

при $u \geqslant U_0 > 0$, то будем говорить, что спектр положительных частот ограничен (аналогично вводим понятие ограниченности спектра отрицательных частот).

Если $dM(u) = dN(u) = 0$ при $|u| \geqslant U_0$, говорим, что спектр ограничен. Числа u будем называть частотами, а $dM(u)$ и $dN(u)$ — „приращениями энергии". Естественно появляются случаи конечного и счетного спектра. В случае конечного спектра имеем:

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \sum_{m=1}^{m_0} \lambda_m (e^{it\mu_m} - 1) + \\ + \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_{-n} (e^{-it\nu_n} - 1), \tag{8,1,1}$$

где m_0, n_0 — натуральные числа; $\mu_m > 0$, $\nu_n > 0$; $\lambda_m > 0$, $\lambda_{-n} > 0$. Отдельная пуассонова компонента P в (8,1,1) имеет х. ф. $\exp(\lambda_m(e^{i\mu_m t} - 1))$ или $\exp(\lambda_{-n}(e^{-it\nu_n} - 1))$, при этом

$$\mu_m = \frac{D(P)}{E(P)} \text{ или } \nu_n = \frac{D(P)}{E(P)}.$$

Случай конечного спектра важен, ибо как известно (см. [44]), совокупность I всех б. д. законов совпадает с совокупностью законов, предельных для законов, отвечающих (8,1,1) (даже если брать только з. р. с $\gamma = 0$).

Случай счетного спектра описывается формулой

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left(e^{i\mu_m t} - 1 - \frac{it\mu_m}{1 + \mu_m^2}\right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n} \left(e^{-it\nu_n} - 1 + \frac{it\nu_n}{1 + \nu_n^2}\right), \tag{8,1,2}$$

где $\lambda_m > 0$, $\lambda_{-n} > 0$ и ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m \mu_m^2}{1 + \mu_m^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{-n} \nu_n^2}{1 + \nu_n^2} \tag{8,1,3}$$

сходятся, причем

$$\sum_{\mu_m < \varepsilon} \lambda_m \mu_m^2 + \sum_{\nu_n < \varepsilon} \lambda_{-n} \nu_n^2 \to 0 \tag{8,1,4}$$

при $\varepsilon \to 0$. Параметры λ_i можно называть „параметрами энергии" при μ_i или $(-\nu_i)$.

Интересный класс б. д. законов составляют законы с ограниченным спектром. Их х. ф. имеет логарифм вида

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-b}^{a} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG_1(u) +$$
$$+ \int_0^a (e^{itu} - 1 - itu)\, dG_2(u), \tag{8,1,5}$$

где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ — ограниченные числа; $G_1(u)$ и $G_2(u)$ — неубывающие функции, ограниченные вне сегмента $[-\varepsilon, \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$ и такие, что сумма

$$\int_{-\varepsilon}^{0} u^2 dG_1(u) + \int_0^{\varepsilon} u^2 dG_2(u) \tag{8,1,6}$$

ограничена при $\varepsilon > 0$ и стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. Здесь пуассонов спектр частот лежит в сегменте $[-b, a]$; неотрицательности „приращений энергии“ $dG_i(u)$ $(i=1,2)$ отвечает безграничная делимость соответствующих з. р. В дальнейшем у нас будут встречаться х. ф. типа (8,1,5), допускающие „отрицательное приращение энергии“ $dG_i(u)$ $(i=1,2)$; мы будем говорить об их „обобщенном пуассоновом спектре“.

Мы можем теперь начать изучение множества I_0 — всех законов, имеющих только б. д. компоненты. Очевидно, $I_0 \subset I$, однако, как было видно на примерах (см. гл. 6), I_0 не совпадает с I; более того, как будет видно из дальнейшего, принадлежность б. д. з. р. к I_0 составляет сравнительно редкое явление. Отдельные элементы множества I_0 мы видели в гл. 6 и гл. 7. Так, законы Гаусса $G \in I_0$ (теорема 6.3.1); законы Пуассона $P \in I_0$ (теорема 6.6.1) и вообще композиция законов Гаусса и Пуассона $G * P \in I_0$ (теорема 7.1.1).

Сформулируем теперь общую теорему.

Теорема 8.1.1 (Ю. В. Линник)

Для того, чтобы безгранично делимый закон F, имеющий гауссову компоненту, имел только безгранично делимые компоненты, необходимо, чтобы его пуассонов спектр был конечным или счетным. При этом пуассоновы частоты в формулах (8,1,1) *и* (8,1,2) *должны совпадать с рядами чисел:*

для μ_m

$$\ldots, k_{-2}k_{-1}\mu, k_{-1}\mu, \mu, \frac{\mu}{k_1}, \frac{\mu}{k_1 k_2}, \ldots, \frac{\mu}{k_1 k_2 \ldots k_n}, \ldots; \tag{8,1,7}$$

для ν_n

$$\ldots, l_{-2}l_{-1}\nu, l_{-1}\nu, \nu, \frac{\nu}{l_1}, \frac{\nu}{l_1 l_2}, \ldots, \frac{\nu}{l_1 l_2 \ldots l_n}, \ldots, \tag{8,1,8}$$

где $\ldots, k_{-2}, k_{-1}, k_1, k_2, \ldots; \ldots, l_{-2}, l_{-1}, l_1, l_2, \ldots$ — *какие-либо наборы натуральных чисел бо́льших 1 (допускаются повторения).*

Доказательство теоремы 8.1.1 довольно сложно. Оно опирается на три основные леммы, имеющие и самостоятельный интерес. Данная глава в основном воспроизводит работу автора [20].

§ 2. ТРИ ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Основная лемма I. *Пусть* $\alpha = \frac{p}{q}$ *— рациональное число, причем дробь* $\frac{p}{q}$ *несократима, и*

$$1 < p < q. \tag{8,2,1}$$

Составим случайную величину X *с х. ф.**

$$\varphi(z) = E\exp(zX) = \exp(\gamma z^2 + \lambda_1(e^z - 1) + \lambda_2(e^{\alpha z} - 1)), \tag{8,2,2}$$

где $\gamma > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

При достаточно малом $\nu > 0$ *функция*

$$\psi(z) = \varphi(z)\exp\left(-\nu\left(e^{\frac{z}{q}} - 1\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\gamma z^2 + \lambda_1(e^z - 1) + \lambda_2(e^{\alpha z} - 1) - \nu\left(e^{\frac{z}{q}} - 1\right)\right) \tag{8,2,3}$$

будет х. ф. некоторой случайной величины Y.

Основная лемма II. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$ *— иррациональное число. Составим случайную величину* X *с х. ф.*

$$\varphi(z) = \exp(\gamma z^2 + \lambda_1(e^z - 1) + \lambda_2(e^{\alpha z} - 1));\ \gamma,\ \lambda_i > 0. \tag{8,2,4}$$

При достаточно малом $\nu > 0$ *и надлежаще выбранном малом* $\eta_0 > 0$ *функция*

$$\psi(z) = \varphi(z)\exp(-\nu(e^{\eta_0 z} - 1)) =$$

$$= \exp(\gamma z^2 + \lambda_1(e^z - 1) + \lambda_2(e^{\alpha z} - 1) - \nu(e^{\eta_0 z} - 1)) \tag{8,2,5}$$

будет х. ф. некоторой случайной величины Y.

Основная лемма III. *Пусть* $G(u)$ *— непрерывная неубывающая на сегменте* $[\beta, 1,]$; $0 < \beta < 1$ *функция, и* $G(1) - G(\beta) > 0$. *Составим случайную величину* X *с х. ф.*

$$\varphi(z) = \exp\left(\gamma z^2 + \int_\beta^1 (e^{zu} - 1)\,dG(u)\right). \tag{8,2,6}$$

При достаточно малом $\nu > 0$ *и подходяще выбранном малом* $\eta_0 > 0$ *функция*

$$\psi(z) = \varphi(z)\exp(-\nu(e^{\eta_0 z} - 1)) =$$

$$= \exp\left(\gamma z^2 + \int_\beta^1 (e^{zu} - 1)\,dG(u) - \nu(e^{\eta_0 z} - 1)\right) \tag{8,2,7}$$

будет х. ф. некоторой случайной величины Y.

---

* В дальнейшем под х. ф. будем понимать $\varphi(z) = E\exp(zX)$ для тех комплексных z, для которых соответствующие интегралы сходятся.

Доказательство этих лемм производится методом перевала; сначала оно идет одинаково во всех трех случаях, затем разветвляется на специфические для каждого из трех случаев приемы.

Для проведения общей части доказательства запишем каждую из трех х. ф. (8,2,2), (8,2,4), (8,2,6) в виде

$$\varphi(z) = \exp\left(\gamma z^2 + \int_{\beta}^{1} (e^{zu} - 1)\, dH(u)\right), \tag{8,2,8}$$

где $\beta < 1$, а $H(u)$ — ограниченная неубывающая функция, причем

$$H(1) - H(\beta) = c > 0. \tag{8,2,9}$$

Докажем, что случайная величина X с х. ф. (8,2,8) имеет плотность вероятности $g(x) > 0$ при всех x.

Составим интеграл

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(it)\, e^{-ixt}\, dt \tag{8,2,10}$$

Из (8,2,8) заключаем, что этот интеграл сходится абсолютно и равномерно по x, так что плотность вероятности $g(x)$ существует и непрерывна на всей реальной оси. Далее, из (8,2,8) видим, что случайную величину X с х. ф. (8,2,8) можно представить в виде суммы двух независимых случайных величин X_1 и X_2

$$X = X_1 + X_2, \tag{8,2,11}$$

причем $E \exp zX_1 = \exp(\gamma z^2)$, т. е. X_1 нормально и невырожденно

$$(\gamma > 0) \text{ и } E \exp zX_2 = \exp\left(\int_{\beta}^{1} (e^{zu} - 1)\, dH(u)\right).$$

Рассмотрим случайную величину X_2. Существует точка ξ — такая, что при любом $\varepsilon > 0$

$$P\{\xi - \varepsilon \leqslant X_2 \leqslant \xi + \varepsilon\} > 0. \tag{8,2,12}$$

Пусть F_1 — (нормальный) з. р., отвечающий X_1, а F_2 з. р. X_2. Тогда X имеет з. р.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x - y)\, dF_2(y).$$

Дифференцируя по x, находим

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1'(x - y)\, dF_2(y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\right] dF_2(y), \tag{8,2,13}$$

где интеграл справа, очевидно, сходится равномерно по x в каждом конечном сегменте значений x, и $\sigma^2 = D(X_1)$. Очевидно, при любом $\varepsilon > 0$

$$g(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{|y-\xi|<\varepsilon} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\right] dF_2(y) >$$

$$> c(x) \int\limits_{|y-\xi|\leqslant\varepsilon} dF_2(y) > 0,$$

где $c(x)$ — некоторая положительная константа, зависящая от x, и учитывается (8,2,12). Этим доказано желаемое.

Пусть теперь $\eta_0 > 0$ — какое-либо число, меньшее β, $\nu > 0$ — малое число; составим

$$\psi(it) = \varphi(it) \exp\left[-\nu\left(e^{\eta_0 it} - 1\right)\right] \tag{8,2,14}$$

и

$$g_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(it) e^{-ixt} dt. \tag{8,2,15}$$

Покажем, что

$$g_\nu(x) > 0 \text{ при } |x| \leqslant X_0(\nu), \tag{8,2,16}$$

где $X_0(\nu)$ — сколь угодно большая константа при достаточно малом ν.

При заданной константе $X_0 > 0$, находим $\varepsilon_0 > 0$ — такое, что $g(x) \geqslant \varepsilon_0$ при $|x| \leqslant X_0$, что возможно на основании предыдущего утверждения. Выберем теперь T_0 так, что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t \geqslant T_0} |\psi(it)| dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| > T_0} |\varphi(it)| dt < \frac{\varepsilon_0}{4}, \tag{8,2,17}$$

что возможно, согласно (8,2,8) и (8,2,14).

Пусть, далее, $\nu > 0$ столь мало, что при $|t| \leqslant T_0$

$$|\varphi(it) - \varphi(it)| < \frac{\varepsilon_0}{8T_0}. \tag{8,2,18}$$

Отсюда имеем: из (8,2,10) и (8,2,15)

$$|g_\nu(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(it) - \psi(it)| dt <$$

$$< T_0 \frac{\varepsilon_0}{8T_0} + \frac{\varepsilon_0}{4} < \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{8,2,19}$$

В силу того, что $g(x) \geqslant \varepsilon_0$ при $|x| \leqslant X_0$, имеем:

$$g_\nu(x) > g(x) - \frac{\varepsilon_0}{2} > \frac{\varepsilon_0}{2}$$

при $|x| \leqslant X_0$, что и доказывает (8,2,16).

§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПЕРЕВАЛА ПРИ $x \leqslant 0$

Общим для доказательства трех основных лемм будет изучение поведения $g_\nu(x)$ при $x \leqslant 0$. Обратимся к выражениям (8,2,8) и (8,2,10).

При данном γ выбираем X_0 столь большим, как это нам понадобится далее; соответственно ему выбираем малое $\nu > 0$ в (8,2,14); полагаем η_0 малым заданным числом. Имеем (см. (8,2,15)):

$$g_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma=0} \psi(z)\, e^{-xz}\, dz, \tag{8,3,1}$$

где $z = \sigma + it$. Далее,

$$\psi(z)\, e^{-xz} = \exp\left(\gamma z^2 - zx + \int\limits_\beta^1 (e^{zu} - 1)\, dH(u) - \nu(e^{\eta_0 z} - 1)\right) =$$

$$= \exp\left[\gamma\left(z - \frac{x}{2\gamma}\right)^2 - \frac{x^2}{4\gamma^2} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_\beta^1 e^{zu} - 1)\, dH(u) - \nu(e^{\eta_0 z} - 1)\right]. \tag{8,3,2}$$

Здесь считаем $x < 0$. Из теоремы Коши непосредственно явствует, что контур интегрирования в (8,3,1) можно переносить на любую вертикальную прямую. Естественно выбрать контур $\sigma = \frac{x}{2\gamma} = \sigma_0$ $\Big($при $x < 0$, точка $z = \frac{x}{2\gamma}$ мало отличается от точки перевала для $\ln(\psi(z)\, e^{-xz}\Big)$, см. § 7, гл. 1. Тогда получим

$$g_\nu(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{4\gamma^2} - H(1) + H(\beta) + \nu\right] J(t), \tag{8,3,3}$$

где

$$J(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\gamma t^2 + \int\limits_\beta^1 e^{\sigma_0 u} e^{itu}\, dH(u) - \nu e^{\eta_0 \sigma_0} e^{\eta_0 it}\right] dt. \tag{8,3,4}$$

Далее имеем:

$$\int\limits_\beta^1 e^{\sigma_0 u} e^{itu}\, dH(u) - \nu e^{\eta_0 \sigma_0} e^{it\eta_0} = \theta c_0 \exp\left(-\eta_0 \frac{|x|}{2\gamma}\right) \tag{8,3,5}$$

(c_0, c_1, ... — в дальнейшем положительные константы, $|\theta| \leqslant 1$; θ в дальнейшем не всегда одно и то же). Отсюда

$$J(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\gamma t^2+\theta c_0\exp-\eta_0\frac{|x|}{2\gamma}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\gamma t^2)\left(1+\theta c_0\exp\left(-\eta_0\frac{|x|}{2\gamma}\right)\right)dt>$$

$$>\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\gamma t^2)\frac{1}{2}\,dt>\frac{c_1}{\sqrt{\gamma}} \qquad (8,3,6)$$

при $|x|$ достаточно большом сравнительно с γ и $\frac{1}{\eta_0}$, что и будем предполагать. Таким образом, $g_\nu(x)>0$ при $x<-X_0$ и, при достаточно малом ν, $g_\nu(x)>0$ при $x\leqslant 0$.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПЕРЕВАЛА ПРИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ x

Перейдем к случаю $x\geqslant X_0$. Рассмотрим выражение вида (8,3,1), где

$$\psi(z)e^{-xz}=\exp\Bigg[\gamma z^2-zx+$$
$$+\int_\beta^1(e^{zu}-1)\,dH(u)-\nu(e^{\eta_0 z}-1)\Bigg]. \qquad (8,4,1)$$

Чтобы найти точки перевала, берем производную в экспоненте и приравниваем ее к 0

$$2\gamma z+\int_\beta^1 e^{zu}u\,dH(u)-\nu\eta_0 e^{\eta_0 z}-x=0.$$

Это уравнение, очевидно, имеет положительный корень $z=\sigma_0$, зависящий от x и монотонно возрастающий вместе с ним,

$$2\gamma\sigma_0+\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}u\,dH(u)-\nu\eta_0 e^{\eta_0\sigma_0}-x=0. \qquad (8,4,2)$$

Полагаем $z=\sigma_0+it$ и переносим контур интегрирования на $\sigma=\sigma_0$. Имеем на этом контуре из (8.4.1)

$$\psi(z)e^{-xz}=\exp U_1(x)\exp V_1(t)\exp V_2(t), \qquad (8,4,3)$$

где

$$U_1(x)=\gamma\sigma_0^2-\sigma_0 x+h_0,\quad h_0=-\int_\beta^1 dH(u)+\nu, \qquad (8,4,4)$$

$$V_1(t)=-\gamma t^2+it(2\gamma\sigma_0-x), \qquad (8,4,5)$$

$$V_2(t)=\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}(\cos tu+i\sin tu)\,dH(u)-$$
$$-\nu e^{\eta_0\sigma_0}(\cos\eta_0 t+i\sin\eta_0 t). \qquad (8,4,6)$$

Положим

$$U_0(\sigma_0)=\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}dH(u)-\nu e^{\eta_0\sigma_0},$$

$$V_3(t)=2\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}\sin^2\frac{tu}{2}\,dH(u)-2\nu e^{\eta_0\sigma_0}\sin^2\frac{\eta_0 t}{2}, \qquad (8,4,7)$$

$$V_4(t)=\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}\sin tu\,dH(u)-\nu e^{\eta_0\sigma_0}\sin\eta_0 t+t(2\gamma\sigma_0-x), \quad (8,4,8)$$

тогда

$$\psi(z)e^{-xz}=\exp(U_1(x)+U_0(\sigma_0))\exp\times$$
$$\times(-\gamma t^2)\exp(-V_3(t))\exp(iV_4(t)), \qquad (8,4,9)$$

разумеется, $V_3(t)$ и $V_4(t)$ зависят от x.

Вычислим производную от $V_4(t)$

$$V_4'(t)=\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}u\cos tu\,dH(u)-\nu e^{\eta_0\sigma_0}\eta_0\cos\eta_0 t+2\gamma\sigma_0-x.$$

В силу (8,4,2) имеем:

$$2\gamma\sigma_0-x-\nu\eta_0 e^{\eta_0\sigma_0}+\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}u\,dH(u)=0,$$

так что

$$V_4'(t)=-2\int_\beta^1 e^{\sigma_0 u}u\sin^2\frac{tu}{2}\,dH(u)+2\nu\eta_0 e^{\eta_0\sigma_0}\sin^2\frac{\eta_0 t}{2}. \quad (8,4,10)$$

§ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ЛЕММЫ I

Теперь обратимся отдельно к основной лемме I. В условиях этой леммы (см. (8,2,1) – (8,2,3)) положим, что функция $H(u)$ в (8,4,1) кусочно постоянная со скачками $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ в точках $u=1$ и $u=\alpha$. Кроме того, положим $\eta_0=\frac{1}{q}$; $\nu\in(0,1)$ пока не фиксируем. Получим при $x\geqslant X_0$

$$\psi(z)e^{-xz}=\exp U_0(x)\exp(-\gamma t^2)\exp\times$$
$$\times(-2e^{\sigma_0}U(t))\exp(iV(t)), \qquad (8,5,1)$$

где

$$U(t)=\lambda_1\sin^2\frac{t}{2}+\lambda_2\exp\left(\frac{p-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\frac{pt}{2q}-$$
$$-\nu\exp\left(\frac{1-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\frac{t}{2q}; \qquad (8,5,2)$$

$$V(t)=\lambda_1 \exp(\sigma_0)\sin t+\lambda_2 \exp\left(\frac{p}{q}\sigma_0\right)\sin\frac{pt}{q}-$$

$$-\nu\exp\left(\frac{\sigma_0}{q}\right)\sin\frac{t}{q}+t(2\gamma\sigma_0-x); \qquad (8,5,3)$$

$$U_0(x)=\gamma\sigma_0^2-\sigma_0 x-\lambda_1-\lambda_2+\nu+U_0(\sigma^0). \qquad (8,5,4)$$

Считая X_0, а следовательно и σ_0, достаточно большими, рассмотрим такие значения t, для которых

$$|U(t)|\leqslant\exp\left[-\left(1-\frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right]. \qquad (8,5,5)$$

Пусть в дальнейшем B означает ограниченную для всех значений встречающихся параметров функцию, не всегда одну и ту же. Из (8,5,5) и (8,5,2) следует

$$\lambda_1\sin^2\frac{t}{2}+\lambda_2\exp\left(\frac{p-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\frac{pt}{q}=B\exp\left(\frac{1-q}{q}\sigma_0\right). \qquad (8,5,6)$$

Отсюда

$$\sin^2\frac{t}{2}=B\exp\left(\frac{p-q}{q}\sigma_0\right);\ \sin^2\frac{pt}{2q}=B\exp\left(\frac{1-p}{q}\sigma_0\right) \qquad (8,5,7)$$

и

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right|=B\exp\left(\frac{p-q}{q}\cdot\frac{\sigma_0}{2}\right);$$

$$\left|\sin\frac{p}{q}\frac{t}{2}\right|=B\exp\left(\frac{1-p}{2q}\frac{\sigma_0}{2}\right). \qquad (8,5,8)$$

Заметим, что $p>1$, в силу (8,2,1), так что обе оценки (8,5,8) нетривиальны при достаточно большом σ_0. Из них выводим.

$$t=2k_1\pi+B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right);$$

$$\frac{p}{q}t=2k_2\pi+B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right),$$

где k_1, k_2 — целые числа. Умножая эти равенства на q, найдем новые равенства

$$qt=2k_1q\pi+B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right),$$

$$pt=2k_1q\pi+B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right). \qquad (8,5,9)$$

Так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима, то целые числа p и q взаимно просты. Ввиду этого найдутся целые числа a и b; ($|a|<q$; $|b|<p$) такие, что $ap+bq=1$. Умножая первое из соотношений (8,5,9) на a, второе на b и складывая, найдем:

$$t=2kq\pi+B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right) \qquad (k\text{ — целое}); \qquad (8,5,10)$$

если $U(t)$ удовлетворяет (8,5,5). Итак, для значений t под условием (8,5,5) можем положить

$$t=2kq\pi+v, \quad |v|<c_1\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2q}\right) \tag{8,5,11}$$

(далее, $c_1, c_2, \ldots$ — положительные константы).

Допустим теперь, что $U(t)$ удовлетворяет (8,5,5). Тогда имеет место (8,5,11). Пользуясь (8,5,2), находим

$$U(t)=\lambda_1\sin^2\frac{v}{2}+\lambda_2\exp\left(\frac{p-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{v}{2}\right)-$$
$$-\nu\exp\left(\frac{1-q}{q}\sigma_0\right)\sin^2\left(\frac{1}{q}\cdot\frac{v}{2}\right).$$

Ввиду малости $|v|$, согласно (8,5,11), имеем:

$$U(t)=\lambda_1\frac{v^2}{4}(1+\Delta(\sigma_0, v)), \tag{8,5,12}$$

где $\Delta(\sigma_0, v)\to 0$ при увеличении σ_0 равномерно по ν при (8,5,11). Это рассуждение годно при любом значении параметра $\nu\in(0,1)$.

Если условие (8,5,5) удовлетворяется, то, как мы видим, выполняется (8,5,12). Допустим теперь, что при условии (8,5,11) имеем:

$$|v|>\exp\left(-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right)=\xi_1. \tag{8,5,13}$$

Тогда из (8,5,12) находим

$$U(t)>\frac{1}{8}\exp\left[-\left(-1\frac{1}{2q}\right)\sigma_0\right]>\exp\left[-\left(1-\frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right]. \tag{8,5,14}$$

§ 6. ИССЛЕДОВАНИЕ $U(t)$

Докажем, что при всех значениях t имеем:

$$U(t)\geqslant 0. \tag{8,6,1}$$

В самом деле, $U(t)$ — тригонометрический полином от $\frac{t}{2q}$. При $t=\pi$ и достаточно большом σ_0 (что предлагается здесь и в дальнейшем) имеем, очевидно, $U(t)>0$. Если для какого-либо t_1 $U(t_1)<0$, то должен иметься хоть один нуль t_0 функции $U(t)$ нечетной кратности, так что

$$U(t_0)=0; \tag{8,6,2}$$

$$U(t_0-\delta)\,U(t_0+\delta)<0 \tag{8,6,3}$$

для всех достаточно малых $\delta>0$. Сопоставляя (8,6,2) с (8,5,5), находим $t_0=2k_0q\pi+v_0$, где k_0 — целое и v_0 имеет оценку (8,5,11). При достаточно малых δ получим из (8,5,2) $U(t_0-\delta)\geqslant 0$, $U(t_0+\delta)\geqslant 0$, что противоречит (8,6,3) и доказывает (8,6,1).

Рассмотрим теперь значения t, нарушающие неравенство (8,5,5). В силу (8,6,1) для таких t имеем:

$$U(t) > \exp\left[-\left(1-\frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right]. \tag{8,6,4}$$

Вернемся теперь к основной формуле

$$g_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \psi(z)\, e^{-xz} dt,\ z = \sigma_0 + it \tag{8,6,5}$$

(см. § 2 и 3). Ось интегрирования по t разобъем на два множества: множество T тех значений t, для которых выполняется (8,5,5) и дополнительное множество D, где верно (8,6,4). Заметим, что, в силу сказанного выше, из (8,5,5) следует более сильное неравенство

$$0 \leqslant U(t) \leqslant \exp\left[-\left(1-\frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right]. \tag{8,6,6}$$

Множество T, как доказано в § 5, содержится в системе сегментов:

$$|t - 2kq\pi| = |v| < \xi_1 =$$
$$= \exp\left[-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right] \quad (k = 0;\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots), \tag{8,6,7}$$

которую мы обозначим T_q; дополнение к T_q, которое мы обозначим D_q, содержится в D. Соответственно этому разобьем (8,6,5) на два интеграла

$$g_\nu(x) = J_{1\nu}(x) + J_{2\nu}(x), \tag{8,6,8}$$

где

$$J_{1\nu} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t\in T_q} \psi(z)\, e^{-zx} dt; \tag{8,6,9}$$

$$J_{2\nu} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t\in D_q} \psi(z)\, e^{-zx} dt. \tag{8,6,10}$$

Оценим $J_{2\nu}(x)$. При $t \in D_q$ выполняется (8,6,4). Ввиду этого при $z = \sigma_0 + it$, в силу (8,5,1),

$$|\psi(z)\, e^{-zx}| \leqslant \exp U_0(x) \exp(-\gamma t^2) \exp\left(-2\exp\frac{\sigma_0}{4q}\right), \tag{8,6,11}$$

откуда

$$|J_{2\nu}(x)| \leqslant \exp U_0(x) \exp\left(-2\exp\frac{\sigma_0}{4q}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma t^2)\, dt =$$

$$= \frac{B}{\sqrt{\gamma}} \exp(U_0(x)) \exp\left(-2\exp\frac{\sigma_0}{4q}\right). \tag{8,6,12}$$

Обратимся к $J_{1\nu}(x)$. Из T_q выделим те значения t, для которых

$$|2\pi qk| \leqslant \frac{\sigma_0 q}{\sqrt{\gamma}}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) = \rho_0. \qquad (8,7,1)$$

Это множество обозначим T_{0q}, а дополнение T_{0q} в T_q обозначим T_{1q}. Имеем, в силу (8,5,1) и (8,6,1), при $t \in T_{1q}$

$$|\psi(z)e^{-zx} \leqslant \exp(U_0(x))\exp(-\gamma t^2), \qquad (8,7,2)$$

так что

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t\in T_{1q}} \psi(z)\,e^{-zx}dt\right| \leqslant \exp[U_0(x)]\int\limits_{\rho_0}^{\infty}\exp[-\gamma t^2]\,dt =$$

$$= \frac{B}{\sqrt{\gamma}}\exp[U_0(x)]\exp\left[-\frac{q^2}{2}\sigma_0^2\left(\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right)\right]. \qquad (8,7,3)$$

Остается интеграл

$$J_\nu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t\in T_{0q}} \psi(z)\,e^{-zx}dt. \qquad (8,7,4)$$

Он является реальным числом, в силу симметричности T_{0q}, относительно 0. Мы будем оценивать его снизу.

Рассмотрим один из сегментов, входящих в T_{0q},

$$\omega_k : |v| = |t - 2kq\pi| \leqslant \xi_1 = \exp\left(-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right). \qquad (8,7,5)$$

Обращаясь к (8,5,1), находим для таких t

$$\gamma t^2 = \gamma(2kq\pi + v)^2 = 4\pi^2\gamma k^2q^2 + 4\pi\gamma kqv + \gamma v^2.$$

Ввиду (8,7,1) и (8,7,5)

$$4\pi\gamma qkv + \gamma v^2 = B\gamma\exp\left(-\frac{2\sigma_0}{5}\right)^{*}. \qquad (8,7,6)$$

Таким образом, при $t \in \omega_k$

$$\exp(-\gamma t^2) = \exp(-4\pi^2\gamma q^2k^2)\left(1 + B\gamma\exp\left(-\frac{2\sigma_0}{5}\right)\right). \qquad (8,7,7)$$

Далее, в силу (8,5,12)

$$\exp(-2e^{\sigma_0}U(t)) = \exp\left[-\frac{v^2}{2}\lambda_1 e^{\sigma_0}(1 + \Delta(\sigma_0, v))\right]. \qquad (8,7,8)$$

Перейдем к функции $V(t)$ (см. (8,5,3)). В силу (8,4,10) имеем:

$$\left.\begin{aligned} &V'(2kq\pi) = V''(2kq\pi) = 0; \\ &V^{(m)}(2kq\pi) = Be^{\sigma_0} \quad (m \geqslant 3). \end{aligned}\right\} \qquad (8,7,9)$$

---

* $\gamma > 0$ — константа, и (8,7,6) будет иметь место при $x > x_0(\gamma)$.

Таким образом,

$$V(t) = V(2kq\pi) + Be^{\sigma_0}\xi_1^3 = V(2kq\pi) + B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{5}\right). \quad (8,7,10)$$

Собирая эти оценки и подставляя в (8,5,1) при $t \in T_{0q}$, находим

$$\psi(z)e^{-zx} = \exp[U_0(x)]\exp[-4\pi^2\gamma q^2k^2]\exp\times$$
$$\times\left[-\frac{v^2\lambda_1}{2}e^{\sigma_0}(1+\Delta(\sigma_0, v))\right]\times$$
$$\times\exp(iV(2kq\pi))\left(1+B\exp\left[-\frac{\sigma_0}{5}\right]\right). \quad (8,7,11)$$

Рассмотрение интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_k}\psi(z)e^{-zx}dt \quad (8,7,12)$$

приводится к рассмотрению

$$\int_{|v|<\xi_1}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\lambda_1 e^{\sigma_0}(1+\Delta(\sigma_0, v))\right)dv. \quad (8,7,13)$$

Полагая $ve^{\sigma_0/2} = w$, приведем наш интеграл к виду

$$\lambda_1^{-1/2}e^{-\sigma_0/2}\int_{|w|<\xi_1 e^{\sigma_0/2}}\exp\left[-\frac{w^2}{2}(1+\delta(w))\right]dw, \quad (8,7,14)$$

где $|\delta(w)| \leqslant \delta(\sigma_0)$ при всех w сегмента интегрирования и $\delta(\sigma_0) \to 0$ при $\sigma_0 \to \infty$. Ввиду того, что $\xi_1 e^{\sigma_0/2} = \exp\left(\frac{\sigma_0}{4q}\right)$, элементарными рассуждениями находим для (8,7,14) выражение

$$\lambda_1^{-1/2}\sqrt{2\pi}e^{-\sigma_0/2}(1+\Delta_1(\sigma_0)), \quad (8,7,15)$$

где $\Delta_1(\sigma_0) \to 0$ при $\sigma_0 \to \infty$. Из (8,7,7) — (8,7,15) находим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_k}\psi(z)e^{-zx}dt = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\sigma_0/2}\exp[U_0(x)]\exp[-4\pi^2\gamma q^2k^2]\times$$
$$\times\exp[iV(2\pi qk)] + Be^{-\sigma_0/2}\exp[U_0(x)\exp[-4\pi^3\gamma qk^2]\Delta_1(\sigma);$$
$$\Delta_1(\sigma_0) \to 0 \text{ при } \sigma_0 \to \infty.$$

При этом, согласно (8,5,3),

$$V(2\pi qk) = 2\pi qk \quad (2\gamma\sigma_0 - x). \quad (8,7,16)$$

§ 8. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ I

Вернемся к интегралу (8,7,4). Имеем:

$$J_\nu = \frac{\lambda_1^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\sigma_0/2}\exp[U_0(x)]\times$$
$$\times\sum_{|2\pi qk|<\rho_0}\exp[-4\pi^2\gamma q^2k^2]\exp[iV(2\pi qk)] +$$
$$+Be^{-\sigma_0/2}\exp[U_0(x)]\left(\sum_{|2\pi qk|<\rho_0}\exp[-4\pi^2\gamma q^2k^2]\right)\Delta_1(\sigma_0) \quad (8,8,1)$$

(см. (8,7,1)). Если мы распространим суммирование на все целые числа k в (8,8,1), то получим погрешность

$$Be^{-\sigma_0/2}\exp[U_0(x)]\,\Delta_2(\sigma_0),\quad \Delta_2(\sigma_0)\to 0, \tag{8,8,2}$$

как, очевидно, из (8,7,1). Таким образом,

$$J_\nu = \frac{\lambda_1^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\sigma_0/2}\exp[U_0(x)]\,S + B(1+\gamma)e^{-\sigma_0/2}\times$$

$$\times\exp[U_0(x)]\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp[-4\pi^2\gamma q^2k^2]\right)\Delta_2(\sigma_0); \tag{8,8,3}$$

$$S=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp[-4\pi^2\gamma q^2k^2+i(2\pi qky)], \tag{8,8,4}$$

где $y=2\gamma\sigma_0-x$, см. (8,7,16).

Согласно теореме 1.5.1 (формула (1,5,2)) при $\operatorname{Re}\omega>0$

$$\nu(\omega,\ \xi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(-\pi m^2\omega)\exp 2\pi im\xi=$$

$$=\omega^{-1/2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\pi\,\frac{(\xi-m)^2}{\omega}\right).$$

Таким образом,

$$S=\nu(4\pi^2\gamma q^2,\ qy)=\frac{1}{2\pi q\sqrt{\gamma}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(qy-k)^2}{4\gamma q^2}\right). \tag{8,8,5}$$

Далее, очевидно,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(qy-k)^2}{4\gamma q^2}\right)\geqslant\exp\left(-\frac{1}{8\gamma q^2}\right),$$

таким образом,

$$S>c_2q\sqrt{\gamma}\exp\left(-\frac{1}{8\gamma q^2}\right). \tag{8,8,6}$$

Далее, очевидно,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(-4\pi^2\gamma q^2k^2)=B(1+\gamma^{-1/2}q).$$

Подставляя полученные оценки в (8,8,3), находим

$$J_\nu>c_2\gamma^{-1/2}q^{-1}\exp\left[-\frac{1}{8\gamma q^2}\right]\exp$$

$$[U_0(x)]\,e^{-\sigma_0/2}(1-B(1+\gamma^{-1/2})\,\Delta_2(\sigma_0)).$$

Таким образом, при достаточно большом σ_0 имеем: $(c_2'>0)$

$$J_\nu>c_2'\gamma^{-1/2}q^{-1}\exp\left(-\frac{1}{8\gamma q^2}\right)e^{-\sigma_0/2}\exp[U_0(x)]. \tag{8,8,7}$$

Обратимся к (8,6,5). Сравнивая (8,6,9) с (8,8,7), находим

$$J_{1\nu}(x) = J_\nu (1 + B\Delta(\sigma_0)), \ \ \Delta(\sigma_0) \to 0 \ \ \text{при } \sigma_0 \to \infty.$$

Далее, сравнивая (8,6,12) с (8,8,7), находим $J_{2\nu}(x) = BJ_\nu \Delta(\sigma_0)$. Обращаясь к (8,6,8), находим

$$g_\nu(x) = J_\nu (1 + B\Delta(\sigma_0)). \tag{8,8,8}$$

Это верно при любом $\nu \in (0,1)$ и $\Delta(\sigma_0) \to 0$ равномерно по ν, при $\sigma_0 \to \infty$.

Теперь можно завершить доказательство основной леммы I. Выберем X_0 столь большим, чтобы при $x \geqslant X_0$ и любом $\nu \in (0,1)$, $g_\nu(x) > \frac{1}{2} J_\nu > 0$. Затем выберем ν столь малым, что $g_\nu(x) > 0$ при $|x| \leqslant X_0$. Мы можем, согласно § 3, считать X_0 столь большим и, соответственно, ν столь малым, что $g_\nu(x) > 0$ при $x \leqslant -X_0$. Этим основная лемма I доказана.

§ 9 ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ЛЕММЫ II

Перейдем к доказательству основной леммы II. Оставляя в (8,2,5) $\nu \in (0,1)$ и $\eta_0 \in \left(0, \frac{\alpha}{8}\right)$ пока неопределенными, как и в § 5 (8,5,1)—(8,5,3), напишем при $x \geqslant X_0 > 1$

$$\psi(z) e^{-zx} = \exp[U_0(x)] \exp[-\gamma t^2] \times \\ \times \exp[-2e^{\sigma_0} U(t)] \exp[V(t)], \tag{8,9,1}$$

где

$$U(t) = \lambda_1 \sin^2 \frac{t}{2} + \lambda_2 \exp(\alpha - 1)\sigma_0 \sin^2 \frac{\alpha t}{2} - \\ - \nu \exp(\eta_0 - 1)\sigma_0 \sin^2 \frac{\eta_0 t}{2}; \tag{8,9,2}$$

$$V(t) = \lambda_1 e^{\sigma_0} \sin t + \lambda_2 e^{\alpha\sigma_0} \sin \alpha t - \\ - \nu \exp(\eta_0 \sigma_0) \sin \eta_0 t + t(2\gamma\sigma_0 - x), \tag{8,9,3}$$

$U_0(x)$ определяется формулой (8,5,4).

Иррациональное число $\alpha \in (0,1)$ разложим в непрерывную дробь

$$\alpha = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}},$$

$q_i \geqslant 1$ — целые числа, неполные частные α. Зададим ряд подходящих дробей α: $\frac{p_1}{Q_1}, \frac{p_2}{Q_2}, \ldots, \frac{p_n}{Q_n}, \frac{p_{n+1}}{Q_{n+1}}$. Как известно (см. § 2, гл. 1), имеем:

$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}\,(n \geqslant 3), \quad Q_n \geqslant 2Q_{n-2}; \quad Q_n \geqslant 2^{\frac{n-1}{2}};$$

$$\left|\frac{p_n}{Q_n} - \frac{p_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}.$$

Далее, если задано любое $\tau > 1$ и Q_n — наибольшее из чисел Q_i, не превосходящих τ, то

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{Q_n}\right| \leqslant \frac{1}{Q_n \tau}. \tag{8,9,4}$$

Рассмотрим ряд знаменателей подходящих дробей

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, Q_{n+1}. \tag{8,9,5}$$

С помощью ряда (8,9,5) построим числа

$$\eta_n' = \frac{\xi_{0n}}{Q_n} + \frac{\xi_{1n}}{Q_n Q_{n+1}} + \ldots + \frac{\xi_{mn}}{Q_n Q_{n+1} \ldots Q_{n+m}} + \ldots, \tag{8,9,6}$$

где целые числа ξ_{in} последовательно определяются следующим образом: $\xi_{0n} = 1$; $\xi_{1n} + \xi_{0n} Q_{n+1} \equiv 0 \pmod{Q_n}$; $0 \leqslant \xi_{1n} < Q_n$; $\xi_{2n} + \xi_{1n} Q_{n+2} + \xi_{0n} Q_{n+1} Q_{n+2} \equiv 0 \pmod{Q_n Q_{n+1}}$, $\quad 0 \leqslant \xi_{2n} < Q_n Q_{n+1}$. Если $\xi_{0n}, \ldots, \xi_{n-1,n}$ определены, то ξ_{mn} определяется сравнением

$$\xi_{mn} + \xi_{m-1,n} Q_{n+m} + \xi_{m-2,n} Q_{n+m} - Q_{n+m} + \ldots$$
$$\ldots + \xi_{0n} Q_{n+1} Q_{n+2} \ldots Q_{n+m} \equiv 0 \pmod{Q_n Q_{n+1} Q_{n+m-1}},$$

$0 \leqslant \xi_{mn} < Q_n Q_{n+1} \ldots Q_{n+m-1}$. При таком определении чисел ξ_{in} получим

$$\left|\eta_n' - \frac{\xi_{0n}}{Q_n} - \frac{\xi_{1n}}{Q_n Q_{n+1}} - \ldots - \frac{\xi_{mn}}{Q_n Q_{n+1} \ldots Q_{n+m}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{Q_{n+m+1}} + \frac{1}{Q_{n+m+2}} + \ldots < \frac{32}{Q_{n+m+1}}, \tag{8,9,7}$$

в силу свойств чисел ξ_{in} и Q_j. При этом $\eta_n' \to 0$. Далее,

$$\frac{\xi_{0n}}{Q_n} + \frac{\xi_{1n}}{Q_n Q_{n+1}} + \ldots + \frac{\xi_{mn}}{Q_n Q_{n+1} \ldots Q_{n+m}} =$$
$$= \frac{a_{mn}}{Q_{mn}};\ (a_{mn} \text{ — целое}) \tag{8,9,8}$$

при $n \to \infty$ и $\eta_n' > 0$ при всех n. Число η_0 будет выбираться как одно из чисел η_n'.

§ 10. ИССЛЕДОВАНИЕ $U(t)$ В УСЛОВИЯХ ЛЕММЫ II

Обратимся к $U(t)$ и будем исследовать ее малые значения. Пусть в некоторой точке t имеем:

$$|U(t)| \leqslant \exp(\xi - 1)\,\sigma_0 = \xi_0, \tag{8,10,1}$$

причем

$$\xi = 4\eta_0 \tag{8,10,2}$$

и $\nu \in (0,1)$ как-либо фиксировано. Из (8,9,2) выводим

$$\lambda_1 \sin^2 \frac{t}{2} + \lambda_2 \exp(\alpha - 1)\sigma_0 \sin^2 \frac{\alpha t}{2} = B \exp(4\eta_0 - 1)\sigma_0. \tag{8,10,3}$$

Отсюда, как и в § 5:

$$\left|\sin \frac{t}{2}\right| = B \exp\left(\frac{\alpha - 1}{2}\sigma_0\right); \ \left|\sin \frac{\alpha t}{2}\right| = B \exp\left(\frac{4\eta_0 - \alpha}{2}\sigma_0\right), \tag{8,10,4}$$

$$\left.\begin{aligned} t &= 2k_1\pi = v_1; \quad v_1 = B \exp\left(\frac{\alpha - 1}{2}\sigma_0\right), \\ \alpha t &= 2k_2\pi + v_2; \quad v_2 = B \exp\left(\frac{4\eta_0 - \alpha}{2}\sigma_0\right). \end{aligned}\right\} \tag{8,10,5,}$$

Пусть $\tau > 1$ — заданное число; Q_n — наибольшее из чисел (8,9,5), не превышающее τ; $\frac{p}{q} = \frac{P_n}{Q_n}$, так что

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\theta}{q\tau}; \ |\theta| \leqslant 1; \quad q \leqslant \tau; \quad (p, q) = 1. \tag{8,10,6}$$

Подставляя (8,10,6) в (8,10,5) и умножая на q, найдем

$$\left.\begin{aligned} qt &= 2k_1q\pi + Bq \exp\left(\frac{\alpha - 1}{2}\sigma_0\right); \\ pt &= 2k_2q\pi + \frac{\theta|t|}{\tau} + Bq \exp\left(\frac{4\eta_0 - \alpha}{2}\sigma_0\right). \end{aligned}\right\} \tag{8,10,7}$$

Числа p и q — взаимно простые; поэтому найдутся a и b — такие, что $ap - bq = 1$, $0 < a < q$, $0 < b < p < q$; при этом из (8,10,7) следует

$$t = 2\pi q(k_2 a - k_1 b) + Bqb \exp\left(\frac{\alpha - 1}{2}\sigma_0\right) + Bqa \exp\left(\frac{4\eta_0 - \alpha}{2}\sigma_0\right) + \theta\frac{|t|a}{\tau}. \tag{8,10,8}$$

Обозначим далее

$$\min\left(\frac{\alpha - 4\eta_0}{4}, \frac{1 - \alpha}{4}\right) = \beta; \ \beta_1 = 0{,}99\beta, \tag{8,10,9}$$

$\beta > \min\left(\frac{\alpha}{8}, \frac{1-\alpha}{4}\right) > 0$, так как $\eta_0 < \frac{\alpha}{8}$. Положим далее

$$\tau = \exp(\beta_1\sigma_0). \tag{8,10,11}$$

Тогда из (8,10,8) получаем

$$t = 2\pi q(k_2 a - k_1 b) + B \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right) + \theta\frac{|t|a}{\tau}. \tag{8,10,11}$$

Мы будем рассматривать большие значения σ_0, начиная со значения, определяемого большим значением параметра X_0. Такие σ_0 (и отвечающие им x в выражении (8,4,2)) будем разбивать на два класса A_1 и A_2:

$$\sigma^0 \in A_1, \text{ если } q \leqslant \tau^{10^{-5}};$$
$$\sigma_0 \in A_2, \text{ если } q > \tau^{10^{-5}}.$$

Рассмотрим сначала поведение $\psi(z) e^{-zx}$ при t, удовлетворяющих (8,10,1), и $\sigma_0 \in A_2$. Будем впредь считать, что η_0 выбрано в классе чисел η'_n так, что

$$0 < \eta_0 < 10^{-10}\beta_1. \tag{8,10,12}$$

§ 11. СЛУЧАИ $|t| \leqslant \sqrt{q}$, $\sigma_0 \in A_2$

Пусть

$$|t| \leqslant \sqrt{q}. \tag{8,11,1}$$

В силу того, что $\sigma \in A_2$, при достаточно большом σ_0, q — велико:

$$q > \exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0). \tag{8,11,2}$$

Поэтому при достаточно большом σ_0 выводим из (8,11,1) и (8,10,11)

$$k_1 a - k_2 b = 0. \tag{8,11,3}$$

Так как a и b — взаимно просты, имеем: $k_1 = k_3 b$; $k_2 = k_4 a$ (k_3, k_4 — целые); $k_3 = k_4$.

Из равенства (8,10,5) выводим

$$t = 2k_3 b\pi + v_1;\ \alpha t = 2k_3 a\pi + v_2 \quad (v_1,\ v_2 \text{ малы}). \tag{8,11,4}$$

Докажем теперь, что t должно быть мало. Для этого рассмотрим поведение чисел a и b. Если $b \geqslant q^{2/3}$, то в силу (8,11,1), при большом σ_0 (что будем предполагать) из (8,11,4) следует $k_3 = 0$, $t = v_1$. Если $b < q^{2/3}$, то $a = \frac{1+bq}{p} < \frac{4}{\alpha} b < \frac{4}{\alpha} q^{2/3}$ и из (8,10,11) и (8,11,3) выводим:

$$t = B\exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right) + \theta |t| q^{-1/3},$$

откуда

$$t = B\exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right).$$

Итак, мы вывели, что при $\sigma_0 \in A_2$ и $|t| \leqslant \sqrt{q}$ соотношение (8,10,1) приводит к оценке

$$t = B\exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right) + B\exp\left(\frac{\alpha-1}{\cdot 2}\,\sigma\right) = B\exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right). \tag{8,11,5}$$

Итак, имеем: при $|t| \leqslant \sqrt{q}$ имеет место (8,11,5), либо

$$|U(t)| > \exp[(4\eta_0 - 1)\sigma_0] = \xi_0. \tag{8,11,6}$$

При t, удовлетворяющих (8,11,5), имеем из (8,9,2)

$$U(t)=\frac{\lambda_1}{4}t^2(1+B\Delta(\sigma_0)). \tag{8,11,7}$$

Отсюда видно, что $U(t)\geqslant 0$ при $|t|\leqslant\sqrt{q}$, ибо если бы $U(t)$ меняло знак в точке $t_0\neq 0$, то $U(t_0)=0$ было бы малым, и $U(t_0)$ выражалось бы формулой (8,11,7), так что было бы $U(t_0)\neq 0$, что противоречиво. Если же $t_0=0$, то в окрестности t_0 имело бы место (8,11,7) и не могла бы происходить перемена знака.

Далее, из (8,9,3), (8,4,8) и (8,4,10) находим

$$V(t)=\frac{t^3}{6}V'''(\theta t)=Be^{\sigma_0}|t|^3. \tag{8,11,8}$$

Из (8,11,7) выводим, при $\exp\left[\frac{\sigma_0}{2}(\zeta_1-1)\right]<|t|<c_2\exp\times\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right)$, где ζ_1 — какая-либо константа $\zeta_1\in(\eta_0,\ 0{,}01)$,

$$U(t)\geqslant\frac{\lambda_1}{4}\exp[\sigma_0(\zeta_1-1)](1+B\Delta(\sigma_0))>$$
$$>\frac{\lambda_1}{8}\exp[\sigma_0(\zeta_1-1)]. \tag{8,11,9}$$

Если же $|t|\leqslant\exp\frac{\sigma_0}{2}(\zeta_1-1)$, то

$$V(t)=B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{4}\right). \tag{8,11,10}$$

Вернемся теперь к интегралу вида (8,6,5)

$$g_\nu(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-zx}dt, \tag{8,11,11}$$

где $\psi(z)e^{-zx}$ определяется формулой (8,9,1); предполагаем, что $\sigma_0\in A_2$. Разобьем ось изменения t на области:

$$D_q:|t|>\sqrt{q};\quad T_{1q}:c_2\exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right)<|t|\leqslant\sqrt{q};$$

$$T_{2q}:\exp\left(-0{,}99\frac{\sigma_0}{2}\right)\leqslant|t|\leqslant c_2\exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right);$$

$$T_{0q}:|t|\leqslant\exp\left(-0{,}99\frac{\sigma_0}{2}\right);$$

соответствующие части интеграла (8,11,11) назовем

$$J(D_q);\ J(T_{1q});\ J(T_{2q});\ J(T_{0q}).$$

Оценим $J(D_q)$. Так как $\sigma_0\in A_2$, то

$$q>\tau^{10^{-5}}>\exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0). \tag{8,11,12}$$

Далее, из (8,9,2) очевидно, что при любом t

$$|\psi(z)e^{-zx}| \leqslant \exp[U_0(x)] \exp[\nu \exp[\eta_0\sigma_0]] \exp(-\gamma t^2). \quad (8,11,13)$$

Таким образом,

$$J(D_q) = B \exp[U_0(x)] \exp[\nu \exp(\eta_0\sigma_0)] \int_{\sqrt{q}}^{\infty} \exp(-\gamma t^2)\, dt =$$

$$= B \exp[U_0(x)] \exp[\nu \exp(\eta_0\sigma_0)] \exp\left[-\frac{\gamma}{2} q\right]. \quad (8,11,14)$$

Учитывая (8,10,13) и (8,11,12), находим для (8,11,14) оценку

$$J(D_q) = B \exp[U_0(x)] \exp[\nu \exp(\eta_0\sigma_0) - \frac{\gamma}{2} \exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0)] =$$

$$= B \exp[U_0(x)] \exp\left[-\frac{\gamma}{4} \exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0)\right]. \quad (8,11,15)$$

§ 12 ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СЛУЧАЯ $\sigma_0 \in A_2$

Рассмотрим теперь $J(T_{1q})$. Из § 11 явствует, что в области T_{1q}

$$U(t) > \exp(4\eta_0 - 1)\sigma_0. \quad (8,12,1)$$

Отсюда

$$J(T_{1q}) = B \exp[U_0(x)] \exp[-2\exp(4\eta_0\sigma_0)]. \quad (8,12,2)$$

Переходим к $J(T_{2q})$. В силу (8,11,9) в области T_{2q} имеем:

$$U(t) > \frac{\lambda_1}{8} \exp(-0,99\sigma_0).$$

Отсюда

$$J(T_{2q}) = B \exp[U_0(x)] \exp(-\exp 0,01\sigma_0). \quad (8,12,3)$$

Наконец, в области T_{0q}, полагая $\xi_1 = \exp\left(-0,99\frac{\sigma_0}{2}\right)$, имеем:

$$J(T_{0q}) = \frac{1}{2\pi} \exp[U_0(x)] \int_{|t|<\xi_1} \exp(-\gamma t^2) \exp \times$$

$$\times \left[-\frac{\lambda_1}{2} e^{\sigma_0} t^2 (1 + B\Delta(\sigma_0))\right] \exp\left[B \exp\left(-\frac{\sigma_0}{2}\right)\right] dt.$$

При достаточно большом σ_0 (что, как обычно, предполагается), можно заменить три подынтегральных множителя соответственно оценками снизу $\frac{1}{2}$; $\exp(\lambda_1 e^{\sigma_0} t^2)$, $\frac{1}{2}$, так что

$$J(T_{0q}) > \frac{1}{8\pi} \exp[U_0(x)] \int_{|t|<\xi_1} \exp(-\lambda_1 e^{\sigma_0} t^2)\, dt >$$

$$> c_3 \exp[U_0(x)]\, e^{-\sigma_0/2}. \quad (8,12,4)$$

Сопоставляя (8,12,4), (8,12,3), (8,12,2) и (8,11,15), находим

$$g_\nu(x) > \frac{c_3}{2} \exp[U_0(x)]\, e^{-\sigma_0/2} > 0 \quad (8,12,5)$$

для $\nu \in (0,1)$; $\sigma_0 \in A_2$; при достаточно большом x (а следовательно и σ_0).

§ 13. ПЕРЕХОД К СЛУЧАЮ $\sigma_0 \in A_1$

Переходя к случаю $\sigma_0 \in A_1$, имеем:

$$q \leqslant \tau^{10^{-5}}. \tag{8,13,1}$$

Положение будет сходно со случаем рационального α, разобранным ранее. Здесь, однако, в силу иррациональности α, q не будет фиксированным числом, а необходимо $q \to \infty$ при возрастании x, а вместе с ним σ_0 и τ. При данном (большом) $\sigma_0 \in A_1$ и соответствующем по формуле (8,10,10) для τ, ось изменения t разбиваем на множества

$$D_\tau : |t| \geqslant \tau^{0,01} \tag{8,13,2}$$

и

$$T_\tau : |t| < \tau^{0,01}. \tag{8,13,3}$$

Соответствующие части интеграла (8,11,11) обозначим $J(D^\tau)$ и $J(T_\tau)$. Займемся сперва $J(D_\tau)$. В силу оценки (8,11,13), верной для любого t, находим

$$J(D_\tau) = B \exp[U_0(x)] \exp[\nu \exp(\eta_0 \sigma_0)] \int\limits_{\tau^{0,01}}^{\infty} \exp(-\gamma t^2)\, dt.$$

Совершенно так же, как в § 11 [формулы (8,11,14), (8,11,15)], получаем оценку

$$J(D_\tau) = B \exp[U_0(x)] \exp\left[-\frac{\gamma}{4} \exp(0,01\, \beta_1 \sigma_0)\right]. \tag{8,13,4}$$

Теперь пусть $t \in T_\tau$, так что верно (8,13,3). Обратимся к формуле (8,10,11). Здесь $0 < a < \tau^{10^{-5}}$, так что получаем: если верно (8,10,1), то $t = 2\pi q k + B\tau^{-0,01} + \theta t \tau^{10^{-5}-1}$; k — целое число. Отсюда

$$t = 2\pi q k + B\tau^{-0,01}. \tag{8,13,5}$$

Полагая $t - 2\pi q k = w$, видим, что (8,10,1) приводит к соотношениям

$$|t - 2\pi q k| = |w| \leqslant c_4 \tau^{-0,01}. \tag{8,13,6}$$

Обратимся к (8,9,1) — (8,9,3). Число q есть одно из чисел ряда (8,9,5). Мы можем считать, что $q > K_0$, где K_0 — любая назначенная нами константа (от этого будет зависеть выбор параметров X_0, ν, η_0). Если Q_{n_0} — наименьшее число ряда (8,9,5), большее K_0, то полагаем впредь $\eta_0 = \eta'_{n_0-1}$ [см. (8,9,6)]; при этом n_0 должно быть столь большим, чтобы η_0 было достаточно малым, в частности, удовлетворяло (8,10,12). Пусть теперь $q = Q_n$; $n \geqslant n_0$. Из (8,9,7) выводим

$$\eta_0 = \frac{l}{q} + \frac{32\theta}{Q_{n+1}}; \quad l,\ q \text{ — целые числа.}$$

Но мы имеем: $q = Q_n < \tau$, $Q_{n+1} > \tau$. В силу (8,13,1)

$$\eta_0 = \frac{l}{q} + \frac{32\theta}{\tau}; \quad q \leqslant \tau^{10^{-5}}. \tag{8,13,7}$$

При выбранном и теперь уже фиксированном значении $\eta_0 = \eta'_{n_0-1}$ и t, подчиняющемся условию (8,13,6), рассмотрим поведение $U(t)$ и $V(t)$ (см. (8,9,2) и (8,9,3)). Имеем в области T_τ

$$\frac{\eta_0 t}{2} = \frac{lt}{2q} + \frac{16\theta t}{\tau}; \quad |t| \leqslant \tau^{0,01}. \tag{8,13,8}$$

Мы имеем далее $\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\theta}{q\tau}$. Здесь $(p, q) = 1$. Кроме того, $0 < l < \frac{p}{2}$, ибо $\eta_0 < \frac{\alpha}{8}$. Имеем далее:

$$\frac{\alpha t}{2} = \frac{pt}{2q} + \frac{\theta t}{2q\tau}, \tag{8,13,9}$$

$|\theta| \leqslant 1$; θ не всегда одно и то же. Рассмотрим значения $t \in T$ под условиями (8,13,6). Имеем:

$$U(t) = \lambda_1 \sin^2 \frac{w}{2} + \lambda^2 \exp(\alpha - 1)\, \sigma_0 \sin^2 \left(\frac{p}{q}\,\frac{w}{2} + \frac{\theta t}{2q\tau}\right) - \\ - \nu \exp(\eta_0 - 1)\, \sigma_0 \sin^2 \left(\frac{l}{q} \cdot \frac{w}{2} + \frac{16\theta_1 t}{\tau}\right). \tag{8,13,10}$$

Докажем неравенство: в условиях (8,13,6)

$$U(t) > \frac{\lambda_1}{8} w^2 + B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\tau_0}{200}\right). \tag{8,13,11}$$

В самом деле,

$$\sin^2\left(\frac{l}{q} \cdot \frac{w}{2} + \frac{16\theta t}{\tau}\right) = B\left(w + \frac{t}{\tau}\right)^2 = \\ = B\tau^{-0,02} = B \exp(-0,02\,\beta\sigma_0). \tag{8,13,12}$$

Из (8,13,10), (8,13,12) и (8,10,12) следует (8,13,11).

§ 14. ПОВЕДЕНИЕ $U(t)$ ПРИ $\sigma_0 \in A_1$

Из (8,13,11) выводим при $|w| \geqslant \exp\left[(\zeta - 1)\,\frac{\sigma_0}{2}\right]$ имеем ($\zeta > 0$ — константа):

$$U(t) > \frac{\lambda_1}{16} \exp\left[(\zeta - 1)\, \sigma_0\right]. \tag{8,14,1}$$

Таким образом, $U(t)$ может не подчиняться неравенству (8,14,1) лишь для таких t, в условиях (8,13,6), для которых

$$|w| \leqslant \exp(\zeta - 1)\, \frac{\sigma_0}{2} = \xi_0. \tag{8,14,2}$$

Обозначим теперь: $T_{\tau q} \subset T_\tau$ множество точек t, входящих в T_τ и подчиненных условию (8,14,2), т. е.

$$|t - 2\pi qk| \leqslant \xi_0, \tag{8,14,3}$$

$T_{\tau q 1} = T_\tau - T_{\tau q}$, $T_{\tau q 0}$ — множество точек $t \in T_{\tau q}$, где $k=0$, т. е.

$$|t| \leqslant \xi_0, \tag{8,14,4}$$

$T_{\tau q 1} = T_{\tau q} = T_{\tau q 0}$, т. е. множество точек $t \in T_\tau$ под условием (8,14,3), где $k \neq 0$. Соответствующие интегралы от $\psi(z)\, e^{-zx}$ обозначим $J(T'_\tau)$, $J(T_{\tau q 0})$, $J(T_{\tau q 1})$. Оценим сперва $J(T'_\tau)$. Имеем, согласно (8,14,1) и (8,9,1), на T'_τ:

$$|\psi(z)\, e^{-zx}| = B \exp(-\gamma t^2) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\lambda_1}{8} \exp \zeta\sigma_0\right) \exp[U_0(x)]. \tag{8,14,5}$$

Отсюда

$$J(T'_\tau) = B \exp[U_0(x)] \exp[-c_5 \exp \zeta\sigma_0]. \tag{8,14,6}$$

Мы приняли, что $q \geqslant K_0$, где, как говорилось ранее, K_0 — выбранная нами по параметрам γ, α — достаточно большая константа. Исходя из этого, оценим $|J(T_{\tau q 1})|$ через K_0. Согласно (8,13,11) и (8,9,1), имеем:

$$J(T_{\tau q 1}) = B \exp[U_0(x)] \sum \exp\left(-\frac{\gamma}{2} 4\pi^2 q^2 k^2\right) \times$$
$$\times \int\limits_{|w| < \xi_0} \exp\left[-2e^{\sigma_0}\left(w^2 + B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\tau}{200}\right)\right)\right] dw. \tag{8,14,7}$$

Интеграл в (8,14,7), очевидно, равен следующему:

$$\int\limits_{|w| < \xi_0} \exp(-2e^{\sigma_0} w^2)\left(1 + B \exp\left[-\frac{\tau}{200}\right]\right) dw = Be^{-\sigma_0/2}. \tag{8,14,8}$$

Таким образом,

$$J(T_{\tau q 1}) = B \exp[U_0(x)]\, e^{-\sigma_0/2} \sum_{k \neq 0} \exp(-2\gamma\pi^2 k^2 q^2).$$

Если $K_0 > \frac{K_1}{\sqrt{\gamma}}$, то $\sum\limits_{k \neq 0} \exp(-2\gamma\pi^2 k^2 q^2) < \exp(-K_1^2)$, так что

$$J(T_{\tau q 1}) = B \exp[U_0(x)]\, e^{-\sigma_0/2} \exp(-K_1^2). \tag{8,14,9}$$

При этом ограниченная функция B в (8,14,9) имеет оценку модуля сверху, не зависящую от K_1.

§ 15. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ II.

Интеграл $J(T_{\tau q 0})$ оценим снизу. Из (8,14,4) находим

$$U(t) = t^2 \left\{\frac{\lambda_1}{4} + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{4} \exp(\alpha - 1)\sigma_0 - \nu \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\eta_0^2}{4} \exp(\eta_0 - 1)\sigma_0 \right\}(1 + Bt). \tag{8,15,1}$$

Далее,

$$V(t)=V(0)+V'(0)\,t+V''(0)\frac{t^2}{2}+V'''(\theta t)\frac{t^3}{6}$$

при $t\in T_{\tau q0}$. Из (8,4,10) видим, что $V'(0)=V''(0)=0$; $V'''(t)=Be^{\sigma_0}$, из (8,9,3) явствует, что $V(0)=0$, поэтому

$$V(t)=Be^{\sigma_0}\xi_0^3=B\exp\left(\frac{3}{2}\zeta_0-\frac{1}{2}\right).$$

Будем считать $\zeta=10^{-3}$, тогда

$$V(t)=B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{4}\right). \tag{8,15,2}$$

Отсюда

$$J(T_{\tau q0})>\frac{1}{2}\exp\left[U_0(x)\right]\int\limits_{|t|<\xi_0}\exp\left(-\lambda_1 e^{\sigma_0}t^3\right)\times$$

$$\times\left(1+B\exp\left[-\frac{\sigma_0}{4}\right]\right)dt>c_6e^{-\sigma_0/2}\exp\left[U_0(x)\right]. \tag{8,15,3}$$

Сопоставляя (8,15,3), (8,14,9), (8,14,6) и (8,13,4), видим, что, если константа K_1 в (8,12,9) была заранее выбрана достаточно большой, то

$$g_\nu(x)>\frac{1}{2}c_6e^{-\sigma_0/2}\exp\left[U_0(x)\right] \tag{8,15,4}$$

при $\sigma_0\in A_1$, достаточно большом, и $\nu\in(0,1)$. Как известно из предыдущего, выбирая достаточно малое $\nu>0$, можно сделать $g_\nu(x)>0$ при $|x|\leqslant X_0$; $X_0>1$ можно заранее выбрать сколь угодно большими. Далее, при $\sigma_0\in A_2$ и достаточно большом, имеем (8,12,5). При $x<-X_0$ также имеем $g_\nu(x)>0$. Это и доказывает основную лемму II.

§ 16. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ЧИСЕЛ ДИНИ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ЛЕММЫ III

Переходим к доказательству основной леммы III. Обратимся к (8,2,6). $G(u)$ в (8,2,6) — непрерывная неубывающая функция. Обозначим

$$G(1)-G(\beta)=\Delta_0>0.$$

Рассмотрим производные числа Дини функции $G(u)$ на сегменте (см. § 1, гл. I). Согласно теореме 1.1.1 имеем следующее.

Пусть $f(u)$ непрерывна в интеграле (a, b), l и L — точные верхняя и нижняя грани какого-либо одного из четырех производных чисел Дини $f(u)$. Тогда

$$l\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant L.$$

Пусть $(a, b)\subset[\beta, 1]$ такой интервал, что $G(b)-G(a)>0$; в силу непрерывности $G(u)$, он должен существовать при a и b достаточно близких к числам β и 1.

Очевидно, все четыре производные числа Дини (допускающие, как известно, и бесконечное значение) неотрицательны, так что $l \geqslant 0$. Рассмотрим левое нижнее производное число Дини.

$$\lambda'_u = \varliminf_{h \to +0} \frac{G(u) - G(u-h)}{h}.$$

Пусть $L = \sup_u \lambda'_u$ ($L \leqslant \infty$), тогда $L > 0$. В самом деле, будь $L = 0$, то ввиду того, что $l \geqslant 0$, из вышеуказанной леммы следовало бы, что $G(b) - G(a) = 0$, что невозможно. Итак, должна существовать точка $u_0 \in [\beta, 1]$, где $\lambda'_{u^0} > 0$. Легко видеть, что существует константа $c > 0$ — такая, что при достаточно малых $h > 0$, $h \leqslant h^{(0)}$

$$G(u_0) - G(u_0 - h) > ch. \tag{8,16,1}$$

Рассмотрим сегмент $I_0 : [u_0 - h^{(0)}, u_0] \subset [\beta, 1]$.

Выберем $h^{(1)}$ столь малым, что

$$1 - 10^{-10} < \frac{u_0 - h^{(1)}}{u_0} < 1; \quad h^{(1)} < h^{(0)}. \tag{8,16,2}$$

Пусть $G(u_0) - G(u_0 - h^{(1)}) = \Delta_1 > 0$. В силу непрерывности $G(u)$ можно выбрать $h^{(2)}$ так, что $G(u_0) - G(u_0 - h^{(2)}) = \frac{\Delta_1}{2}$; $h^{(2)} < h^{(1)}$. Тогда $G(u_0 - h^{(2)}) - G(u_0 - h^{(1)}) = \frac{\Delta_1}{2}$.

Рассмотрим сегменты $I_1 : [u_0 - h^{(2)}, u_0]$; $I_2 : [u_0 - h^{(1)}, u_0 - h^{(2)}]$.

Положим $\frac{u}{u_0} = v$; $u = vu_0$; $G(u) = G(u_0 v) = G_1(v)$.

Тогда сегменты I_1 и I_2 превратятся в сегменты изменения $v : I'_1 = [1 - h_1^{(2)}, 1]$; $I'_2 = [v^{(1)}, v^{(2)}]$, где $\frac{h^{(2)}}{u_0} = h_1^{(2)}$, $v^{(1)} = 1 - \frac{h^{(1)}}{u_0}$; $v^{(2)} = 1 - \frac{h^{(2)}}{u_0}$.

Из (8,16,1) вытекает неравенство для $G_1(v)$

$$G_1(1) - G_1(1 - h) > \frac{c}{u_0} h \tag{8,16,3}$$

при $h \leqslant \frac{h^{(0)}}{u_0}$. Кроме того, $G_1(1) - G_1(1 - h^{(2)}) = \frac{\Delta_1}{2}$; $G(v^{(2)}) - G(v^{(1)}) = \frac{\Delta_1}{2}$ и, в силу (8,16,2),

$$1 - 10^{-10} < 1 - v^{(2)} < 1. \tag{8,16,4}$$

Теперь осуществим в сегменте I'_2 следующую конструкцию: задается большое число S_0. На сегменте I'_2 отмечаем все рациональные дроби $\frac{r}{s}$ со знаменателями $1 < s \leqslant S_0$. Возле каждой из них опишем интервал $\left(\frac{r}{s}-\delta_{\frac{r}{s}},\ \frac{r}{s}+\delta_{\frac{r}{s}}\right)$, где $\delta_{\frac{r}{s}}$ избраны так, что сумма приращений $G_1(v)$ по этим интервалам не превосходит $\frac{\Delta_1}{4}$.

В оставшейся системе сегментов выберем сегмент $I_2^{(S_0)}$ такой, что приращение $G_1(u)$ на нем равно $\Delta_2>0$ (что, очевидно, возможно). На сегменте $I_2^{(S_0)}$ к функции $G_1(u)$ применяем то же рассуждение о левом нижнем производном числе Дини, что и раньше. Оно доказывает, что найдется число $\alpha\in I_2^{(S_0)}$ — такое, что

$$G_1(\alpha)-G_1(\alpha-h)>c'h \tag{8,16,5}$$

при $0<h<h^{(3)}$; $c'>0$ — константа.

§ 17. СЕГМЕНТЫ π_1 И $\pi(S_0)$

Дальнейшие рассуждения будут вестись о сегментах I_1'' и сегменте $[\alpha-h^{(3)},\alpha]$. Эти сегменты переобозначим π_1 и $\pi(S_0)$; переобозначим также $h_1^{(2)}=h_0$, $h^{(3)}=\rho_0$ так, что будет

$$\pi_1=[1-h_0,\ 1];\quad \pi(S_0)=[\alpha-\rho_0,\ \alpha]. \tag{8,17,1}$$

Теперь введём новую случайную величину X_0 — такую, что

$$\varphi_0(z)=E\exp(zX_0)=$$
$$=\exp(\gamma z^2+\int\limits_{\pi_1}(e^{zv}-1)\,dG_1(v)+\int\limits_{\pi(S_0)}(e^{zv}-1)\,dG_1(v)). \tag{8,17,2}$$

Мы будем доказывать сначала, что при достаточно малом $\nu_0>0$ и подходяще выбранном малом $\eta_0<0$, функция

$$\psi_0(z)=\varphi_0(z)\exp(-\nu_0(e^{\eta_0 z}-1)) \tag{8,17,3}$$

будет х. ф. некоторой случайной величины Y. Положим $G_1(1+v)=\Lambda(v)$, $G_1(\alpha+v)=\Lambda_1(v)$. Тогда

$$\int\limits_{\pi_1}(e^{zv}-1)\,dG_1(v)=\int\limits_{-h_0}^{1}(e^{z(1+v)}-1)\,d\Lambda(v), \tag{8,17,4}$$

$$\int\limits_{\pi(S_0)}(e^{zv}-1)\,dG_1(v)=\int\limits_{-\rho_0}^{\alpha}(e^{z(\alpha+v)}-1)\,d\Lambda_1(v). \tag{8,17,5}$$

Считая $x\geqslant X_0$ ($X_0>1$ — большое), находим точку перевала $\sigma_0=\sigma_0(x)$, соответственно (8,4,2), и полагаем, как и ранее, $z=\sigma_0+it$. Положим далее

$$h(\sigma_0)=\int\limits_{-h_0}^{0}e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v) \tag{8,17,6}$$

и $\nu_0 \in (0, 1)$. Получим в обозначениях, аналогичных (8,7,1)—(8,9,3),

$$\psi_0(z)e^{-zx} =$$

$$= \exp[U_0(x)] \exp[-\gamma t^2] \exp[-2e^{\sigma_0} U(t)] \exp[iV(t)], \qquad (8,17,7)$$

$$U(t) = \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2}\, d\Lambda(v) + \exp(\alpha - 1)\sigma_0 \times$$

$$\times \int_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(\alpha+v)}{2}\, d\Lambda_1(v) - \nu_0 \exp(\eta_0 - 1)\sigma_0 \sin^2 \frac{\eta_0 t}{2}, \qquad (8,17,8)$$

$$V(t) = e^{\gamma_0} \int_{-h_0}^{0} \sin t(1+v)\, d\Lambda(v) + e^{\alpha\sigma_0} \times$$

$$\times \int_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin t(\alpha+v)\, d\Lambda_1(v) - \nu_0 \sin(\eta_0 t) + t(2\gamma_0\sigma_0 - x). \qquad (8,17,9)$$

Полагая $\Delta = \int_{-h_0}^{0} d\Lambda(v)$, из (8,17,6) находим

$$h(\sigma_0) \leqslant \int_{-h_0}^{0} d\Lambda(v) = \Delta. \qquad (8,17,10)$$

В дальнейшем $a_0, a_1, \ldots$ будут означать положительные константы; $\zeta_0, \zeta_1, \ldots$ — малые положительные константы, $K_0, K_1, \ldots$ — большие положительные константы; σ_0 будет считаться достаточно большим.

Имеем:

$$h(\sigma_0) = \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) > \frac{a_0}{\sigma_0}. \qquad (8,17,11)$$

В самом деле, при достаточно большом σ_0 имеем:

$$h(\sigma_0) > \frac{1}{e} \int_{-\frac{1}{\sigma_0}}^{0} d\Lambda(v) > \frac{a_0}{\sigma_0}, \text{ в силу (8,16,3)}$$

Пусть, далее, $R(\sigma_0) = 4\ln\sigma_0$; $h_1(\sigma_0) = \frac{R(\sigma_0)}{\sigma_0}$.

Тогда

$$\int_{-h_0}^{-h_1(\sigma_0)} e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) < \exp[-R(\sigma_0)] \int_{-h_0}^{-h_1(\sigma_0)} d\Lambda(v) < \frac{\Delta}{\sigma_0^4} < \frac{1}{2}\frac{a_0}{\sigma_0}.$$

В силу (8,17,11), отсюда выводим

$$\int_{-h_1(\sigma_0)}^{0} e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) > \frac{1}{2} h(\sigma_0). \qquad (8,17,12)$$

Совершенно аналогично трактуется интеграл $\rho(\sigma_0) = \int\limits_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \times$ $\times\, d\Lambda_1(v)$. Имеем:

$$\rho(\sigma_0) \geqslant \frac{a_0}{\sigma_0};$$

$$\int\limits_{-h_1(\sigma_0)}^{0} e^{\sigma_0 v} d\Lambda_1(v) > \frac{1}{2} \int\limits_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v} d\Lambda_1(v) = \frac{1}{2}\rho(\sigma_0). \quad (8,17,13)$$

Нам нужно будет еще очевидное равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\xi^2 e^{\sigma_0} \int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v)\right] d\xi = a_1 e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-1/2}. \quad (8,17,14)$$

В дальнейшем будем считать

$$|t| \leqslant \exp(0{,}51\eta_0\sigma_0). \quad (8,17,15)$$

Значениями t, не удовлетворяющими (8,17,15) мы можем пренебречь. На основании очевидного аналога (8,11,13), имеем:

$$\int\limits_{|t| > \exp(0{,}51\eta_0\sigma_0)} |\psi_0(z)\, e^{-zx}|\, dt =$$

$$= B \exp(U_0(x)) \exp(-0{,}01\eta_0\sigma_0), \quad (8,17,16)$$

чем, как видно из дальнейшего, можно будет пренебречь.

§ 18. МАЛЫЕ ЗНАЧЕНИЯ $U(t)$ В УСЛОВИЯХ ЛЕММЫ III

Рассмотрим теперь те значения $U(t)$, для которых

$$|U(t)| < K_1 e^{-\sigma_0}\sigma_0. \quad (8,18,1)$$

Из (8,17,8) находим

$$0 < \int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2} d\Lambda(v) + \exp(\alpha - 1)\sigma_0 \times$$

$$\times \int\limits_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(\alpha+v)}{2} d\Lambda_1(v) = B\nu_0 \exp(\eta_0 - 1)\sigma_0. \quad (8,18,2)$$

При этом, в силу (8,16,4), $1 - \alpha \leqslant 10^{-10}$ мы будем считать взятым в интервале $(0, 10^{-10})$. Докажем, что

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right| \leqslant K_1 \exp\left(-\sigma_0 \frac{1 - 1{,}52\eta_0}{3}\right) = \xi_1. \quad (8,18,3)$$

Пусть это не так, и $\left|\sin\frac{t}{2}\right| > \xi_1$. Положим $\xi_1' = \xi_1 \exp(-0{,}51\eta_0\sigma_0)$. Тогда при $|v| \leqslant \xi_1'$ имеем, учитывая (8,7,15), $\left|\sin\frac{t(1+v)}{2}\right| > \frac{\xi_1}{4}$.

Отсюда

$$\int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2}\, d\Lambda(v) > \frac{\xi_1^2}{16} \int\limits_{-\xi_1'}^{0} e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) >$$

$$> \frac{a_0}{16} \xi_1^3 \exp(-0{,}51 \eta_0 \sigma_0), \text{ в силу } (8{,}16{,}3).$$

Далее, $\xi_1^3 = K_1^3 \exp(-\sigma_0(1 - 1{,}52\eta_0))$ и полученное равенство противоречит (8,18,2). Этим (8,18,3) доказано.

Аналогично из (8,18,1) следует

$$\left|\sin\frac{\alpha t}{2}\right| \leqslant K_1 \exp\left(-\sigma_0 \frac{\alpha - 1{,}52\eta_0}{3}\right) = \xi_2 \qquad (8{,}18{,}4)$$

Причем $\xi_2 = \xi_1 \exp\frac{1-\alpha}{3}\sigma_0$, $1 - \alpha \leqslant 10^{-10}$.

§ 19. СЛУЧАЙ РАЦИОНАЛЬНОГО α В ЛЕММЕ III

Дальнейшие рассуждения будут зависеть от того, является ли α рациональным или иррациональным числом. Начнем со случая рационального $\alpha = \frac{p}{q}$ $\left(\text{дробь } \frac{p}{q} \text{ несократима}\right)$. При этом, в силу (8,16,4), $1 < p < q$). Далее, по конструкции сегмента $\pi(S_0)$ должно быть

$$q > S_0, \qquad (8{,}19{,}1)$$

ибо все рациональные числа с меньшими знаменателями были выброшены. Выбираем

$$\eta_0 = \frac{1}{q}, \qquad (8{,}19{,}2)$$

считая $S_0 > 10^{20}$. Из (8,18,4) и (8,18,5) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{t}{2} &= \theta\xi_2; \\ \sin\frac{t}{2}\frac{p}{q} &= \theta_1\xi_2. \end{aligned}\right\} \qquad (8{,}19{,}3)$$

Отсюда, в силу взаимной простоты p и q, как и ранее, выводим

$$t = 2\pi kq + 2\theta q^2 \xi_2 = 2\pi qk + \theta\xi_3 \qquad (8{,}19{,}4)$$

(k — целое; $|\theta_i| < 1$; θ не всегда одно и то же), или

$$t = 2\pi kq + w; \quad |w| \leqslant \xi_3. \qquad (8{,}19{,}5)$$

Пусть $U(t)$ подчиняется (8,18,1). Тогда для t имеем соотношение (8,19,5) и t подчиняется (8,19,4). Имеем:

$$t\frac{1+v}{2} = k\pi qv + \frac{w}{2}(1+v) + \pi kp,$$

$$\frac{t}{2}\left(\frac{p}{q} + v\right) = k\pi qv + \frac{w}{2}\left(\frac{p}{q} + v\right) + \pi kp.$$

Таким образом, $\frac{t}{2}(1+v)-\frac{t}{2}\left(\frac{p}{q}+v\right)=\frac{w}{2}\left(1-\frac{p}{q}\right)+\pi k(q-p)$ при любом значении v. Отсюда видно, что при w под условием (8,19,5) либо $\sin^2\frac{t}{2}(1+v)$, либо $\sin^2\frac{t}{2}(\alpha+v)$ будет не меньше $\frac{w^2}{K_2}$. Далее, $\sin^2\frac{\eta_0 t}{2}=\sin^2\frac{t}{2q}=\sin^2\frac{w}{2q}=\frac{w^2}{4q^2}(1+B|w|)$. Поэтому из (8,17,8) следует

$$U(t)>w^2\left(\frac{1}{16}\exp\left[(\alpha-1)\,\sigma_0\right]\right)\frac{a_0}{\sigma_0}-\nu_0\frac{1}{2q^2}\exp\left(\frac{1}{q}-1\right)\sigma_0>$$

$$>w^2\left(a_2\exp(\alpha-1)\,\sigma_0\right)\frac{1}{\sigma_0}. \tag{8,19,6}$$

Отсюда мы выводим прежде всего, $U(t)\geqslant 0$ при всех рассматриваемых t, ибо если $U(t_1)=0$, то в окрестности t_1 функция $U(t)$ не может менять знак. Далее, если имеет место (8,18,1), то из (8,19,6) заключаем

$$w^2 a_2\frac{1}{\sigma_0}\exp(\alpha-1)\,\sigma_0<K_2 e^{-\sigma_0}\sigma_0;$$

$$|w|\leqslant\frac{K_2^{\frac{1}{2}}}{a_2^{\frac{1}{2}}}\sigma_0\exp\left(-\frac{\alpha\sigma_0}{2}\right)\leqslant\exp\left(-\frac{\alpha-\zeta_0}{2}\sigma_0\right)=\xi_4. \tag{8,19,7}$$

Теперь, считая S_0 и, стало быть, q достаточно большим, разберем поведение интеграла $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t-2\pi qk|\leqslant\xi_4}\psi_0(z)\,e^{zx}\,dt$. Мы будем считать $k\neq 0$.

Если

$$|k|>4\sqrt{\frac{\sigma_0}{\gamma}}, \tag{8,19,8}$$

то

$$|t|\geqslant 4\pi q\sqrt{\frac{\sigma_0}{\gamma}}. \tag{8,19,9}$$

Ввиду того, что $U(t)\geqslant 0$, из (8,17,7) находим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>4\sqrt{\frac{\sigma_0}{\gamma}}}\psi_0(z)\,e^{-zx}\,dt=B\exp\left[U_0(x)\right]\exp(-\pi q\sigma_0). \tag{8,19,10}$$

Как мы увидим далее, такой величиной можно пренебречь. Рассмотрим поведение $U(t)$ при $|t-2\pi qk|\leqslant\xi_4$ и k, не удовлетворяющем неравенству (8,19,8).

Обратим внимание на последний член $U(t)$ в (8,17,8). Он имеет вид $\left(\eta_0 = \frac{1}{q};\ \ w = t - 2\pi kq\right)$

$$B\exp\left(\frac{1}{q} - 1\right)\sigma_0 \sin^2\frac{w}{2q} = B\exp\left(-\frac{3}{2}\sigma_0\right). \qquad (8,19,11)$$

Отсюда

$$-2e^{\sigma_0}U(t) = -2e^{\sigma_0}\left(\int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(1+v)\,d\Lambda(v) + \right.$$

$$\left. + \exp(\alpha-1)\sigma_0\int\limits_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(\alpha+v)\,d\Lambda_1(v)\right) + B\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_0\right).$$

Стало быть,

$$2e^{\sigma_0}U(t) \geqslant$$

$$\geqslant 2e^{\sigma_0}\int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(1+v)\,d\Lambda(v) + B\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_0\right). \qquad (8,19,12)$$

Далее,

$$\frac{t}{2}(1+v) = \frac{2\pi qk + w}{2}(1+v) = \pi kq + \frac{w}{2}(1+v) + \pi kqv,$$

и

$$\sin^2\frac{t}{2}(1+v) = \sin^2\left((\pi kqv + \frac{w}{2}(1+v)\right).$$

Далее, h_0 было фиксировано, а $q > S_0$, и вся конструкция, связанная с S_0, производится независимо от h_0. При достаточно большом q и $|k| \geqslant 1$ имеем:

$$\int\limits_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(1+v)\,d\Lambda(v) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{-\frac{1}{4|k|q}}^{0} e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(1+v)\,d\Lambda(v). \qquad (8,19,13)$$

Так как $|\pi kqv| \leqslant \frac{\pi}{4}$, в этом случае

$$\int\limits_{-\frac{1}{4|k|q}} e^{\sigma_0 v}\sin^2\frac{t}{2}(1+v)\,d\Lambda(v) >$$

$$> \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{1}{4|k|q}}^{0} e^{\sigma_0 v}\left(\pi kqv + \frac{w}{2}(1+v)\right)^2 d\Lambda(v). \qquad (8,19,14)$$

Из (8,17,7), (8,17,8), (8,19,12), (8,19,13) и (8,19,14) имеем:

$$(|t-2\pi qk|\leqslant \xi_4;$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int \psi_0(z)\,e^{-zx}\,dt\right| = B\exp\left[U_0(x)\right]\exp\left(-\gamma\pi^2k^2q^2\right);$$

$$\int\limits_{|w|<\xi_4} \exp\times$$

$$\times\left[-e^{\sigma_0}\int\limits_{-\frac{1}{4|k|q}}^{0} e^{\sigma_0 v}\left(\pi kqv+\frac{w}{2}(1+v)\right)^2 d\Lambda(v)\right]dw. \qquad (8,19,15)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$J=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(aw^2+2bw+c\right)\right]dw,$$

где $aw^2+2bw+c$ — определенный квадратный полином с дискриминантом $-D=b^2-ac<0$.

Имеем:

$$J=\frac{a_3}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{D}{a}\right)<\frac{a_3}{\sqrt{a}}. \qquad (8,19,16)$$

Обращаясь к (8,19,15), находим

$$e^{\sigma_0}\int\limits_{-\frac{1}{4|k|q}} e^{\sigma_0 v}\left(\pi kqv+\frac{w}{2}(1+v)\right)^2 d\Lambda(v)=aw^2+2bw+c,$$

где

$$a=e^{\sigma_0}\int\limits_{-\frac{1}{4|k|q}}^{0} e^{\sigma_0 v}\,\frac{(1+v)^2}{2}\,d\Lambda(v). \qquad (8,19,17)$$

Ввиду этого последний интеграл в (8,19,15) имеет оценку сверху

$$a_3 e^{-\frac{\sigma_0}{2}}\left(\int\limits_{-\frac{1}{4|k|q}}^{0} e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v)\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (8,19,18)$$

Обратимся теперь к (8,17,12). Если σ_0 достаточно велико сравнительно с q (что предполагается), то

$$\frac{1}{4|k|q}>\frac{a_4}{\sqrt{\sigma_0}\,q}>\frac{4\ln\sigma_0}{\sigma_0}=h_1(\sigma_0) \qquad (8,19,19)$$

и, в силу (8,17,12),

$$\int\limits_{-\frac{1}{4|k|q}} e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v)>\int\limits_{-h_1(\sigma_0)}^{0} e^{\sigma_0 v}\,d\Lambda(v)>\frac{1}{2}h(\sigma_0);$$

(8,19,18) не превосходит

$$a_4 e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}}, \qquad (8,19,20)$$

а выражение (8,19,15) не превосходит

$$B \exp [U_0(x)] e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} \exp(-\gamma\pi^2 k^2 q^2). \qquad (8,19,21)$$

§ 20. ЗАВЕРШЕНИЕ РАССМОТРЕНИЯ СЛУЧАЯ РАЦИОНАЛЬНОГО α

Суммируя выражения (8,19,21) по всем k с $|k| \geqslant 1$, получаем оценку

$$B \exp [U_0(x)] e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma^0))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\pi^2 q^2\right). \qquad (8,20,1)$$

Далее, рассмотрим значения t, для которых (8,18,1) не выполнено. Так как $U(t) \geqslant 0$, то

$$U(t) > K_1 e^{-\sigma_0} \sigma_0. \qquad (8,20,2)$$

Если A множество таких значений t, то, очевидно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_A \psi_0(z) e^{-zx} dt = B \exp [U_0(x)] \exp [-2K_1\sigma_0] \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-\gamma t^2] dt =$$

$$= B \exp [U_0(x)] e^{-\frac{\sigma_0}{2}} \exp(-K_1\sigma_0). \qquad (8,20,3)$$

Наконец, остается случай $k = 0$, т. е. интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \xi_4} \psi_0(z) e^{-zx} dt. \qquad (8,20,4)$$

Здесь

$$U(t) < t^2 \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v). \qquad (8,20,5)$$

Далее, согласно (8,4,10),

$$V(t) = V(0) + V'''(\theta t)\frac{t^3}{6} = Be^{\sigma_0}\xi_4^3 = B \exp\left(-\frac{1}{4}\sigma_0\right). \qquad (8,20,6)$$

Ввиду этого из (8,20,5), (8,20,6) и (8,17,7) вытекает

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \xi_4} \psi_0(z) e^{-zx} dt > a_5 e^{-\frac{\sigma_0}{2}} \left(\int_{-h_6}^{1} e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v)\right)^{-1/2} \exp [U_0(x)] =$$

$$= a_5 e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} \exp [U_0(x)]. \qquad (8,20,7)$$

Сопоставив (8,20,7), (8,20,3), (8,20,1) и (8,19,10), находим, что при достаточно больших $x > X_0$ (и, стало быть, σ_0) и S_0

$$g_{1\nu_0}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(z) e^{-zx} dt >$$

$$> \frac{a_5}{2} e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} \exp[U_0(x)] > 0. \qquad (8,20,8)$$

При $|x| \leqslant X_0$ и достаточно малом $\nu_0 > 0$ имеем $g_{1\nu_0}(x) > 0$, как доказывается в § 2, а при $x < -X$ имеем $g_{1\nu_0}(x) > 0$, как явствует из § 3.

§ 21. ПЕРЕХОД К СЛУЧАЮ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО α

Перейдем к случаю, когда α иррационально. Здесь будем действовать во многом аналогично § 9—15. Мы делаем конструкцию сегмента $\pi(S_0)$, как и ранее; из предыдущего видно, что если S_0 достаточно велико (сравнительно с уже выбранным h_0 и $\frac{1}{\gamma}$), а $\alpha = \frac{p}{q}$ — рационально, то $g_{1\nu_0}(x) > 0$. Выберем такое S_0, что если бы соответствующее α было рациональным, то получилось бы $g_{1\nu_0}(x) > 0$, и зафиксируем его. Остается предположить, что избираемое нами, соответственно § 16, число α является иррациональным. Разложим его в непрерывную дробь, составим ряд подходящих дробей $\frac{P_n}{Q_n}$ и числа η_n', как и в § 9; число η_0 будет избираться одним из них. Рассуждения § 17 и 18, разумеется, не меняются. Соотношения (8,18,3) и (8,18,4) используются, как в § 10. Вводится большое число $\tau > 1$. Если Q_n — наибольшее из чисел (8,9,5), не превосходящее τ, и если $U(t)$ подчинено (8,18,1), то будет иметь место соотношение, аналогичное (8,10,8). Вводим число (8,10,9) и определяем τ с помощью (8,10,10). Тогда имеем (8,10,11). Считаем σ_0 большим; σ_0 будем разделять, как и в § 10, на такие же классы A_1 и A_2. Начнем со случая $\sigma_0 \in A_2$. Выбираем η_0 в классе чисел η_n' столь малым, что удовлетворяется (8,10,12); полагаем $\nu_0 \in (0,1)$.

Далее, считая $|t|\sqrt{g}$, повторяем рассуждение § 11 и находим, что имеет место либо (8,11,5), либо (8,11,6), причем, разумеется, в (8,11,6) $U(t)$ отвечает также обозначенной функции в (8,17,8). При t, удовлетворяющих (8,11,5), имеем из (8,17,8)

$$U(t) = t^2 \left\{ \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \left(\frac{1+v}{2}\right)^2 (1+Bt)\, d\Lambda(v) + \right.$$

$$+ \exp(\alpha - 1)\sigma_0 \int_{-\rho_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \left(\frac{\alpha+v}{2}\right)^2 (1+Bt)\, d\Lambda_1(v) -$$

$$\left. - \nu_0 \exp(\eta_0 - 1)\sigma_0 \frac{\eta_0}{4} (1+Bt) \right\}.$$

Таким образом, считая, как обычно, σ_0 достаточно большим и учитывая, что $h(\sigma_0) > \frac{|a_0|}{\sigma_0}$ [см. (8,11,12)], находим

$$U(t) \geqslant \frac{t^2}{8} \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v}\, d\Lambda(v) = \frac{t^2}{8} h(\sigma_0). \qquad (8,21,1)$$

Мы видим отсюда, что $U(t) \geqslant 0$ при $|t| \leqslant \sqrt{g}$. Далее, при

$$|t| \geqslant \exp\frac{\sigma_0}{2}(\zeta_1 - 1) = \xi_0 \qquad (8,21,2)$$

имеем:

$$U(t) \geqslant \frac{1}{8}\exp[\sigma_0(\zeta_1 - 1)]\, h(\sigma_0) > \exp\sigma_0(\zeta_2 - 1) \qquad (8,21,3)$$

при $\zeta_2 = \frac{1}{2}\zeta_1$.

Далее, как и в (8,20,6), находим, что при $|t| \leqslant \xi_0$, $V(t) = B\exp\left(-\frac{\sigma_0}{4}\right)$. При $|t| \leqslant \xi_0$ легко находим из (8,17,8)

$$U(t) < 16t^2 h(\sigma_0). \qquad (8,21,4)$$

Теперь обращаемся к интегралу

$$g_{1\nu_0}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt. \qquad (8,21,5)$$

Как и в § 11, вводим области изменения t: D_q, T_{1q}, T_{2q}, T_{0q} и интегралы $J(D_q)$, $J(T_{1q})$, $J(T_{2q})$, $J(T_{0q})$. Имеем (8,11,13), где $\psi(z)$ нужно заменить на $\psi_0(z)$, и оценку (8,11,15) для $J(D_q)$. Как в § 12, имеем оценку (8,12,2) для $J(T_{1q})$ и (8,12,3) для $J(T_{2q})$. Переходим к оценке $J(T_{0q})$ снизу. Имеем:

$$J(T_{0q}) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\xi_0} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt. \qquad (8,21,6)$$

В силу (8,21,4) и (8,17,7) находим

$$J(T_{0q}) > \frac{1}{4\pi}\exp[U_0(x)]\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-32e^{\sigma_0} h(\sigma_0)\, t^2]\, dt >$$

$$> a_5 \exp[U_0(x)]\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}}. \qquad (8,21,7)$$

Сравнивая (8,21,7), (8,12,2), (8,12,3) и (8,11,15), приходим к выводу: $g_{1\nu_0}(x) > \frac{a_5}{e}\exp(U_0(x))\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}}(h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} > 0$ при достаточно большом $\sigma_0 \in A_2$.

Теперь рассмотрим случаи $\sigma_0 \in A_1$, следуя § 13 и 15. Как и в § 13, вводим области D_τ и T_τ. Интеграл $J(D_\tau)$ оценивается (8,13,4). При $U(t)$, подчиненном (8,18,1), будем иметь соотношение (8,10,11), из которого следует (8,13,5) или (8,13,6). Далее, имеем (8,13,7)—(8,13,9). Из (8,13,8) следует (8,13,12), после чего (8,17,8) дает

$$U(t) > \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2}\, dv + B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\tau}{200}\right). \qquad (8,22,1)$$

Положим сперва $k \neq 0$,

$$t = 2\pi k q + w; \quad |w| \leqslant c_4 \tau^{-0,01} = \xi_0. \qquad (8,22,2)$$

Далее рассуждаем, как в § 19 (см. (8,19,12) и (8,19,13)). Имеем (8,19,13), считая q достаточно большим. Затем получаем (8,19,14) и (8,19,15), где вместо ξ_4 нужно брать ξ_0. Далее, с помощью (8,19,16)—(8,19,20) находим для интеграла

$$\int_{|t-2\pi kq|<\xi_0} \psi_0(z) e^{-zx}\, dt$$

оценку

$$B \exp[U_0(x)]\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} \exp(-\gamma \pi^2 k^2 q^2). \qquad (8,22,3)$$

Суммируя по $k \neq 1$, получаем оценку

$$B \exp[U_0(x)]\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \pi^2 q^2\right). \qquad (8,22,4)$$

Для значений $U(t)$, не подчиняющихся (8,18,1), т. е. подчиненных (8,20,2), получаем, как и в § 20, оценку интеграла вида (8,20,3)

$$B \exp[U_0(x)]\, e^{-\frac{\sigma_0}{2}} \exp(-K_1 \sigma_0). \qquad (8,22,5)$$

Наконец, при $k = 0$ имеем из (8,17,8):

$$U(t) < 2 \int_{-h_0}^{0} e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2}\, dv + B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\tau}{200}\right) <$$
$$< 4t^2 h(\sigma_0) B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\tau}{200}\right). \qquad (8,22,6)$$

Отсюда

$$U(t) > \exp \sigma_0 (\zeta_1 - 1) \quad \text{при} \quad |t| \leqslant \exp \frac{\sigma_0}{2} (2\zeta_1 - 1)$$

($\zeta_1 > 0$ — константа). Это позволяет написать

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\xi_0} \psi_0(z) e^{-zx}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\xi_1} \psi_0(z) e^{-zx}\, dt + B \exp\left(-\exp - \frac{\zeta_1}{2} \sigma_0\right), \qquad (8,22,7)$$

где $\xi_1 = \exp\left[\frac{\sigma_0}{2}(2\zeta_1 - 1)\right]$. После этого $V(t)$ при $|t| \leqslant \xi_1$ оценивается, как в (8,20,6), и мы получаем, как в (8,20,7),

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \xi_1} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt > a_5 e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} \exp[U_0(x)]. \qquad (8,22,8)$$

Сопоставляя (8,22,8), (8,22,7), (8,22,5,) (8,22,4) и (8,13,4), находим при $x \geqslant X_0$ и $\sigma_0 \in A_1$

$$g_{1\nu_0}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_0(z)\, e^{-zx}\, dt >$$

$$> \frac{a_5}{2} e^{-\frac{\sigma_0}{2}} (h(\sigma_0))^{-\frac{1}{2}} \exp[U_0(x)] > 0. \qquad (8,22,9)$$

При достаточно малом $\nu_0 > 0$ имеем $g_{1\nu_0}(x) > 0$ при $|x| \leqslant \leqslant X_0$ и $g_{1\nu_0}(x) > 0$ при $x \leqslant -X_0$. Таким образом, при достаточно малом $\nu_0 > 0$, функция (8,17,3) будет х. ф. случайной величины Y_0.

Обращаясь к (8,17,7), замечаем, что

$$\psi(z) = \exp\left[\gamma z^2 + \int\limits_{I_1} \left(e^{z\frac{u}{u_0}} - 1\right) dG(u) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{I_2^{(S_0)} \cdot u_0} \left(e^{z\frac{u}{u_0}} - 1\right) dG(u) - \nu_0 (e^{\eta_0 z} - 1)\right],$$

где $I_2^{(S_0)} u_0$ — сегмент $I_2^{(S_0)}$, растянутый в u_0 раз.

Если заменим $\gamma > 0$ числом $\frac{\gamma}{u_0^2} > 0$, то, очевидно, рассуждения такие же, только число ν_0, быть может, придется еще уменьшить. Таким образом функция

$$\psi_1(z) = \exp\left[\frac{\gamma}{u_0^2} z^2 + \int\limits_{I_1} \left(e^{\frac{z}{u_0} u} - 1\right) dG(u) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{I_2^{(S_0)} \cdot u_0} \left(e^{\frac{z}{u_0} u} - 1\right) dG(u) - \nu \left(e^{\eta_0 u_0 \frac{z}{u_0}} - 1\right)\right] \qquad (8,22,10)$$

будет х. ф. случайной величины Y_1 при $\nu > 0$, $\nu \leqslant \nu_0$. Но тогда и

$$\psi_2(z)=\psi_1(zu_0)=\exp\Bigg[\gamma z^2+\int\limits_{I_1}(e^{zu}-1)\,dG(u)+$$

$$+\int\limits_{I_2^{(S_0)}\cdot u_0}(e^{zu}-1)\,dG(u)-\nu(e^{\eta_0 u_0 z}-1)\Bigg] \qquad (8{,}22{,}11)$$

будет х. ф. случайной величины Y_2.

Обращаясь к (8,2,6), обозначим множество $[\beta,\ 1]-I_1-$ $-I_2^{(S_0)}\cdot u_0$, где первый член содержит сумму второго и третьего, через D. Очевидно, функция

$$\psi_3(z)=\exp\Bigg[\int\limits_D(e^{zu}-1)\,dG(u)\Bigg] \qquad (8{,}22{,}12)$$

будет х. ф. случайной величины Y_3, притом безгранично делимой.

Считая Y_3 независимым от Y_2, получаем, что $\psi_2(z)\psi_3(z)=$ $=E\exp z\times(Y_2+Y_3)$ есть х. ф. случайной величины Y_2+Y_3. Но $\psi_2(z)\psi_3(z)=\psi(z)$, как видно из (8,2,7), и лемма III доказана.

§ 23. ВЫВОД ТЕОРЕМЫ 8.1.1 ИЗ ТРЕХ ОСНОВНЫХ ЛЕММ

Если в (8,2,2)—(8,2,7) переменить знак у переменной z, то, очевидно, леммы I, II, III останутся в силе. Кроме того, если в (8,2,6) берется интеграл не от β до 1, а от β_1 до β_2, $\beta_2>\beta_1>0$, то, очевидно, лемма III остается в силе; достаточно произвести соответствующие замены переменных u и z, состоящие в умножении этих переменных на положительные числа.

Теперь мы можем доказывать необходимость условия (8,1,7) и (8,1,8) теоремы 8.1.1. Сперва покажем, что если имеющий гауссову компоненту закон $F\in L$ имеет только б. д. компоненты, то его пуассонов спектр в формуле (8,0,1) не может иметь непрерывных компонент. Пусть это не так. Пусть X — соответствующая случайная величина и пусть, например, непрерывная компонента имеется в функции $G_+(u)$. Тогда X разлагается на сумму двух независимых случайных величин $X=X_1+X_2$, причем X_1 имеет х. ф. $\varphi_1(t)$ вида

$$\varphi_1(t)=\exp\Bigg[-\frac{\gamma}{2}t^2+\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}(e^{itu}-1)\,dG(u)\Bigg], \qquad (8{,}23{,}1)$$

где $G(u)$ — непрерывная функция. Согласно лемме III, при достаточно малом $\nu>0$ функция вида

$$\varphi_3(t)=\exp\Bigg[-\frac{\gamma}{2}t^2+\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}(e^{itu}-1)\,dG(u)-\nu(e^{i\eta_0 t}-1)\Bigg] \qquad (8{,}23{,}2)$$

будет х. ф. случайной величины X_3. Очевидно, функция $\varphi_4(t) = \exp[\nu(e^{i\eta_0 t}-1)]$ будет х. ф. пуассоновой случайной величины X_4, и $X_1 = X_3 + X_4$; X_3, X_4 — независимы и не зависят от X_2. Тогда $X = X_3 + (X_2 + X_4)$, где все компоненты независимы, и X_3 не является безгранично делимым, как следует из (8,23,2). Аналогично действуем, если отрицательная часть пуассонова спектра содержит непрерывную компоненту. Итак, закон $F \in I_0$, имеющий гауссову компоненту, может иметь лишь счетный или конечный пуассонов спектр. Имеет место соотношение (8,1,2). Пусть $\mu = \mu_{m_1}$ и $\mu' = \mu_{m_2}$ — две любые частоты положительной части пуассонова спектра в (8,1,2) и $\mu < \mu'$. Докажем, что $\frac{\mu'}{\mu} = n$ — целое число. В самом деле, рассмотрим

$$\varphi_1(t) = \exp[-\gamma t^2 + \lambda_{m_1}(e^{it\mu}-1) + \lambda_{m_2}(e^{it\mu'}-1)].$$

Если $\frac{\mu}{\mu'} = \alpha$ — иррационально, то, согласно лемме II, действуя как было сказано выше, найдем разложение $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)\varphi_3(t)$, где $\varphi_2(t)$ будет отвечать не б. д. закону; значит, исходный закон F будет иметь не б. д. компоненту. Итак, $\alpha = \frac{p}{q}$ — рационально. Тогда по таким же соображениям из леммы I вытекает, что $p = 1$ (считаем $(p, q) = 1$), иначе исходный закон F имел бы не б. д. компоненту. Итак, если $\mu_{m_2} > \mu_{m_1}$, то $\frac{\mu_{m_2}}{\mu_{m_1}}$ — целое число. Совершенно то же касается частот в отрицательной части пуассонова спектра: если $\nu_{m_2} > \nu_{m_1}$, то $\frac{\nu_{m_2}}{\nu_{m_1}}$ — целое число. Отсюда следует, что числа μ_m могут иметь только две предельных точки: 0 или $+\infty$. В самом деле, если бы у них существовала предельная точка $\mu \neq 0$, ∞, то в сегменте $\left[\frac{3}{4}\mu, \frac{5}{4}\mu\right]$ существовали бы две частоты μ и $\mu' > \mu$, причем, очевидно, $\frac{\mu'}{\mu} \leqslant \frac{5}{3}$ не могло бы быть целым числом. Совершенно аналогично, числа ν_m могут иметь лишь две предельные точки 0 или ∞.

Пусть $\mu > 0$ — одно из чисел μ_m (если их множество не пусто). Все числа $\mu_m > \mu$, в силу сказанного выше, можно упорядочить по возрастанию, и отношение каждого из них к предыдущему будет целым числом, а числа левее μ можно упорядочить по убыванию, и каждое из них будет также делить предыдущее. То же касается и чисел ν_m.

Таким образом, теорема 8.1.1 доказана.

Заметим, что наличие гауссовой компоненты (условие $\gamma > 0$) весьма существенно; при ее отсутствии, теорема неверна. Случай отсутствия гауссовой компоненты рассматривается в гл. 12.

Глава девятая

БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ ЗАКОНЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ К I_0

Из гл. 8 мы знаем, что для принадлежности б. д. з. имеющего гауссову компоненту к I_0, т. е. для того, чтобы он имел только б. д. компоненты, необходимо, чтобы его спектр был конечным или счетным и имел вид (8,1,7) и (8,1,8). В данной главе будут содержаться достаточные условия принадлежности к I_0, причем в отличие от гл. 8 наличие гауссовой компоненты не предполагается.

Теорема 9.0.1.

Если безгранично делимый закон F имеет конечный или счетный пуассонов спектр, описываемый формулами (8,1,7) *и* (8,1,8,), *то* $F \in I_0$, *т. е. имеет только безгранично делимые компоненты.*

Разумеется, эти б. д. компоненты должны иметь спектр также типа (8,1,7) и (8,1,8). Заметим, что теорема 7.1.1 гл. 7 есть частный случай этой теоремы; сама гл. 7 служила для пояснения соответствующего доказательства в самом простом случае и облегчения его в случае теоремы 9.0.1.

Помимо теоремы 9.0.1 в этой главе будут доказываться еще некоторые другие теоремы о б. д. з. с ограниченным спектром. Сформулируем эти теоремы. Для б. д. з. с ограниченным спектром х. ф. имеет вид

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-b}^{0} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG_1(u) + \\ + \int_{0}^{a} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG_2(u), \qquad (9,0,1)$$

где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ — ограниченные числа $G_1(u)$ и $G_2(u)$ — неубывающие функции, ограниченные вне сегмента $[-\varepsilon, \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$; сумма

$$\int_{-\varepsilon}^{0} u^2\, dG_1(u) + \int_{0}^{\varepsilon} u^2\, dG_2(u) \tag{9,0,2}$$

ограничена при любом $\varepsilon > 0$ и стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$.

Формула (9,0,1) получается из формулы Леви — Хинчина (6,1,1) при замене постоянной β, если заметим, что

$$\int_{-b}^{0} itu\left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) dG_1(u) + \int_{0}^{a} itu\left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) dG_2(u) = \beta_1 it \tag{9,0,3}$$

абсолютно сходится. Для краткости в дальнейшем будем записывать (9,0,1) в виде

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-b}^{a} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG(u). \tag{9,0,4}$$

Имеет место:

Теорема 9.0.2

Пусть F — безгранично делимый закон с ограниченным пуассоновым спектром, так что для его х. ф. имеет место формула (9,0,4), ($\gamma \geqslant 0$). *Всем его компонентам отвечают х. ф. вида*

$$f(t) = \exp\left(P_3(it) + t^4 \int_{-b}^{a} e^{itu}\, \Phi(u)\, du\right), \tag{9,0,5}$$

где $P_3(it)$ — полином степени не выше 3 с реальными коэффициентами, а $\Phi(u)$ — реальная функция, суммируемая с квадратом на сегменте $[-b, a]$. *При этом представление* (9,0,5) *единственно.*

Пусть F б. д. з. р. с ограниченным спектром, сосредоточенным на сегменте $[-b, a]$ [см. формулу (9,0,4)]. Будем говорить, что спектр F рационален правее точки α; $0 < \alpha < a$, если его х. ф. имеет вид

$$\ln \varphi(t)\, \beta it - \gamma t^2 + \int_{-b}^{0} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG_1(u) +$$
$$+ \int_{0}^{\alpha} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG_2(u) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\exp\left(it\frac{a_j\mu}{q}\right) - 1\right), \tag{9,0,6}$$

где $\lambda_j > 0$; a_j, q — целые; $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$; $\frac{a_1}{q}\mu > \alpha$, $\mu > 0$.

Совершенно аналогично определяем пуассонов спектр, рациональный левее точки $\beta < 0$; $\beta < -b$.

Теорема 9.0.3

Пусть F — б. д. закон с ограниченным пуассоновым спектром, рациональным правее точки $\alpha \geqslant 0$; $\alpha < a$ (в формуле (9,0,1)) *Тогда всем его компонентам отвечают х. ф. вида*

$$\ln \varphi(t) = P_3(it) + t^4 \int_{-b}^{a} e^{itu} \Phi(u)\, du + \sum_{n=1}^{q} (\alpha_n + \beta_n it)\left(\exp \frac{itn\mu}{q} - 1\right), \qquad (9,0,7)$$

где α_n, β_n — реальные числа (не обязательно положительные), $\Phi(u)$ — суммируемая с квадратом на $[-b, a]$ функция; $P_3(it)$ — полином не более, чем третьей степени.

При этом, если $n = a_k$ — наибольшее число $\leqslant q$, для которого $\alpha_{a_k} + i\beta_{a_k} \neq 0$, то $\alpha_{a_k} > 0$, $\beta_{a_k} = 0$.

Совершенно аналогичная теорема имеет место для законов с ограниченным спектром, рациональным левее точки $\beta \leqslant 0$, $\beta > -b$.

Если структура рациональной части спектра F в формуле (9,0,6) отвечает (8,1,7), то, как оказывается, и во всех компонентах F должен присутствовать спектр вида (8,1,7). Точнее имеет место теорема (9.0.4).

Теорема 9.0.4

Пусть F — б. д. закон с ограниченным спектром, рациональным правее точки $\alpha > 0$; притом, пусть в формуле (9,0,6) a_{j+1} *делится на* a_j $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$. *Тогда в формуле* (9,0,7) $\beta_n = 0$, $\alpha_n \geqslant 0$, *и если* $\alpha_{n_1} > 0$, $\alpha_{n_2} > 0$, $n_2 > n_1$, *то* n_2 *делится на* n_1 $(n_i \leqslant q)$.

Аналогичное высказывание имеет место для отрицательной части спектра.

Из теоремы 9.0.4 нетрудно вывести теорему 9.0.1.

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ

Пусть дан б. д. закон с ограниченным пуассоновым спектром, т. е. с х. ф. вида (9,0,4)

$$\ln \varphi(it) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-b}^{a} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG(u), \qquad (9,1,1)$$

где β — реально, $\gamma \geqslant 0$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ — ограниченные константы, $G(u)$ — неубывающая функция, подчиненная обычным условиям. Докажем, что $\varphi(t)$ — целая функция. Интеграл (9,1,1) будет существовать и абсолютно сходиться при любом комплексном значении аргумента $it=z$ [см. условие (9,0,2)]. Производная от (9,1,1) по аргументу $z=it$ будет также существовать всюду. Таким образом, $\ln\varphi(it)$ будет целой функцией it, а $f(z)=\varphi(it)$ — целой функцией z, не имеющей нулей на всей плоскости. Положим

$$z=it=x+iy;\ \operatorname{Re} z=x;\ \operatorname{Im} z=y;$$

$$f(z)=\varphi(it)=\exp\left(\beta z+\gamma z^2+\int_{-b}^{a}(e^{zu}-1-zu)\,dG(u)\right). \quad (9,1,2)$$

Не нарушая общности, можем считать $\beta=0$. Если Y — случайная величина с законом распределения F, то

$$f(z)=E\exp(zY)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(zy)\,dF(y). \quad \mathbf{(9,1,3)}$$

Пусть имеем разложение $F=F_1*F_2$ или $Y=Y_1+Y_2$, где Y_1 и Y_2 — независимые случайные величины, отвечающие законам F_1 и F_2 и х. ф. $\varphi_1(t)$; $\varphi_2(t)$. В силу теоремы 4.1.1 $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ будут целыми функциями. Положим

$$f_j(z)=\varphi_j(it)=E\exp(zY_j)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(zy)\,dF_j(y);\ j=1,2. \quad (9,1,4)$$

Тогда

$$f(z)=f_1(z)f_2(z) \quad (9,1,5)$$

на всей комплексной плоскости.

Из (9,1,4) видим, что $f_j(z)$ — неотрицательны на реальной оси $z=x$ и $f(0)=1$. Из (9,1,2) видно, что $f(z)$, а стало быть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ не имеют нулей на комплексной плоскости. Пусть $g(z)=\ln f_1(z)$, причем взята ветвь логарифма, реальная на реальной оси. Имеем:

$$f_1(z)=\exp g(z)=E\exp(zY_1). \quad (9,1,6)$$

Отсюда

$$f_2(z)=E\exp(zY_2)=f(z)\exp(-g(z)). \quad (9,1,7)$$

Пусть Y_0 — случайная величина, распределенная, как Y, и независимая от Y_1. Имеем тогда из (9,1,6):

$$f(z)\exp g(z)=E\exp z(Y_0+Y_1). \quad (9,1,8)$$

Повторяя рассуждения, ведущие к лемме 1 гл. 7 [см. 7,1, 10)], находим

$$|f(x+iy)\exp(\pm g(x+iy))|\leqslant f(x)\exp(\pm g(x)). \quad (9,1,9)$$

Положим $u(x,\ y)=\operatorname{Re} g(z)$, $v(x,\ y)=\operatorname{Im} g(z)$, так что $g(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$, тогда

$$|\exp(\pm g(x+iy))|=\exp(\pm u(x,\ y)).$$

Далее, из (9,1,2) (где полагаем $\beta = 0$)

$$|f(x+iy)| = \exp \operatorname{Re}\left(\gamma z^2 + \int_{-b}^{a} (e^{zu} - 1 - zu)\, dG(u)\right) =$$

$$= \exp\left(\gamma(x^2 - y^2) + \int_{-b}^{a} (e^{xu}\cos yu - 1 - xu)\, dG(u)\right),$$

так что

$$|f(x+iy)\exp(\pm g(x+iy))| = \exp\Big(\gamma(x^2-y^2) + \int_{-b}^{a} (e^{xu}\cos yu - 1 - xu)\, dG(u) \pm u(x, y)\Big). \tag{9,1,10}$$

Отсюда выводится одна из основных лемм.

Лемма 1

$$0 \leqslant u(x, 0) - u(x, y) \leqslant \gamma y^2 + 2\int_{-b}^{a} e^{xu}\sin^2\frac{yu}{2}\, dG(u). \tag{9,1,11}$$

Доказательство. (Из (9,1,10) и (9,1,9) выводим:

$$\gamma(x^2 - y^2) + \int_{-b}^{a} (e^{xu}\cos yu - 1 - xu)\, dG(u) + u(x, y) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma x^2 + \int_{-b}^{a} (e^{xu} - 1 - xu)\, dG(u) + u(x, 0);$$

$$\gamma(x^2 - y^2) + \int_{-b}^{a} (e^{xu}\cos yv - 1 - xu)\, dG(u) - u(x, y) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma x^2 + \int_{-b}^{a} (e^{xu} - 1 - xu)\, dG(u) - u(x, 0).$$

Отсюда находим:

$$u(x, y) - u(x, 0) \leqslant \gamma y^2 + 2\int_{-b}^{a} e^{xu}\sin^2\frac{yu}{2}\, dG(u);$$

$$u(x,y) - u(x, 0) \geqslant -\gamma y^2 - 2\int_{-b}^{a} e^{xu}\sin^2\frac{yu}{2}\, dG(u).$$

При этом два последних интеграла сходятся в окрестности $u = 0$, в силу условия (9,0,2).

Отсюда

$$|u(x, y) - u(x, 0)| \leqslant \gamma y^2 + 2\int_{-b}^{a} e^{xu}\sin^2\frac{yu}{2}\, dG(u). \tag{9,1,12}$$

Далее, из (9,1,6) имеем:

$\exp g(x) \geqslant |\exp g(x+iy)|$ или $u(x, 0) - u(x, y) \geqslant 0.$

Последнее неравенство вместе с (9, 1, 12) приводит к (9, 1, 11).

Лемма 2

При $|x| \to \infty$ имеем:

$$\int_{-b}^{a} (e^{zu} - 1 - zu)\, dG(u) = O\left(|z|^2 \left(e^{\frac{a}{2}x} + e^{-\frac{b}{2}x}\right) + e^{ax} + e^{-bx}\right) \quad (9,1,13)$$

Доказательство. В силу условия (9,0,2) интегралы $\int_0^a u^2\, dG(u)$ и $\int_{-b}^{0} u^2\, dG(u)$ сходятся. Имеем при $|z| > 0$

$$\left|\int_0^a (e^{zu} - 1 - zu)\, dG(u)\right| = \int_0^a \frac{1}{u^2}(e^{zu} - 1 - zu)\, u^2\, dG(u) =$$

$$= \int_0^{|z|^{-1}} + \int_{|z|^{-1}}^{a/2} + \int_{a/2}^{a}$$

(определяем $dG(u) = 0$ при $u > a$). Имеем:

$$\int_0^{|z|^{-1}} = O(|z|^2); \quad \int_{|z|^{-1}}^{a/2} = O\left(|z|^2 \exp\frac{a}{2}x\right) \int_{a/2}^{a} = O(e^{ax}).$$

Аналогично оцениваем $\int_{-b}^{0}$. Это приводит к (9,1,13).

Чтобы извлечь из (9,1,11) информацию относительно $u(x, y) = \operatorname{Re} g(z)$, нужно иметь оценку для $u(x, 0)$.

Лемма 3

$$u(x, 0) = O\left(x^2 \left(e^{\frac{a}{2}x} + e^{-\frac{b}{2}x}\right) + e^{ax} + e^{-bx}\right). \quad (9,1,14)$$

Доказательство. Обратимся к (9,1,7) и (9,1,8), полагая там $z = x$. Имеем:

$$\exp\left(\gamma x^2 + \int_{-b}^{a} (e^{xu} - 1 - xu)\, dG(u) - u(x, 0)\right) = \\ = E\exp(x, Y_2), \quad (9,1,15)$$

$$\exp\left(\gamma x^2 + \int_{-b}^{a} (e^{xu} - 1 - xu)\, dG(u) + u(x, 0)\right) = \\ = E\exp x(Y_0 + Y_2). \quad (9,1,16)$$

Введем в рассмотрение нормальную величину Z, независимую от Y_0, Y_1, Y_2, в совокупности, для которой

$$E\exp(xZ) = \exp(x^2);$$

$$\exp\left((1+\gamma)x^2 + \int_{-b}^{a}(e^{xu} - 1 - xu)\,dG(u) - u(x, 0)\right) = \\ = E\exp x(Z + Y_2); \qquad (9,1,17)$$

$$\exp\left((1+\gamma)x^2 + \int_{-b}^{a}(e^{xu} - 1 - xu)\,dG(u) + u(x, 0)\right) = \\ = E\exp x(Z + Y_0 + Y_2). \qquad (9,1,18)$$

Рассмотрим случайные величины $Z + Y_2$ и $Z + Y_0 + Y_2$. В каждую из них будет входить независимая от второго слагаемого нормальная компонента Z с ненулевой дисперсией. Отсюда явствует существование четырех пар положительных чисел $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ $(i = 1,2,3,4)$, таких, что при $x > 0$

$$E\exp x(Z + Y_2) > \alpha_1 \exp\beta_1 x; \qquad (9,1,19)$$

$$E\exp x(Z + Y_0 + Y_2) > \alpha_2 \exp\beta_2 x \qquad (9,1,20)$$

и при $x < 0$

$$E\exp x(Z + Y_2) > \alpha_3 \exp(-\beta_3 x), \qquad (9,1,21)$$

$$E\exp x(Z + Y_0 + Y_2) > \alpha_4 \exp(-\beta_4 x). \qquad (9,1,22)$$

Вернемся к утверждению (9,1,14). Допустим, что (9,1,14) нарушено при $x > 0$. Тогда найдется такая последовательность $x_j \to \infty$, что (с учетом леммы 2)

$$|u(x_j, 0)| > 2\left|\int_{-b}^{a}(e^{ux_j} - 1 - x_j u)\,du\right| + 2e^{ax_j}. \qquad (9,1,23)$$

Здесь $u(x_j, 0)$ может быть положительной и отрицательной. Допустим сначала, что для бесконечной подпоследовательности $\{t_j\}$; $t_j \to \infty$ чисел x_j будет $u(t_j, 0) > 0$. Тогда из (9,1,17) находим

$$E\exp t_j(Z + Y_2) < \exp(1+\gamma)t_j^2 - 2e^{at_j} < \exp(-e^{at_j})$$

для достаточно больших t_j. Это противоречит (9,1,19). Приходится допустить, что $u(x_j, 0) < 0$ при $j \geqslant j_0$. Тогда (9,1,23) и (9,1,18) дают при $j \geqslant j_0$

$$E\exp x_j(Z + Y_0 + Y_2) < \exp((1+\gamma)x_j^2 - 2e^{ax_j}) < \exp(-e^{ax_j}),$$

что противоречит (9,1,20). Итак, при $x > 0$ неравенство (9,1,23) невозможно.

§ 2. ИЗУЧЕНИЕ $u(x, y)$ И $v(x, y)$

Лемма 4

$$u(x, y) = O\left(|z|^2\left(e^{\frac{a}{2}x} + e^{-\frac{b}{2}x}\right) + e^{ax} + e^{-bx}\right). \quad (9,2,1)$$

Доказательство. Из (9.1.11) находим

$$|u(x, y)| \leqslant u(x, 0) + \gamma y^2 + 2\int_{-b}^{a} e^{xu}\sin^2\frac{yu}{2}\,dG(u). \quad (9,2,2)$$

Далее, имеем, как в § 1

$$\int_{-b}^{a} e^{xu}\sin^2\frac{yu}{2}\,dG(u) = O\left(e^{ax} + e^{-bx} + y^2\left(e^{\frac{a}{2}x} + e^{-\frac{b}{2}x}\right)\right). \quad (9,2,3)$$

Из (9,2,2) с учетом (9,1,14) и (9,2,3) находим

$$u(x, y) = O\left(\gamma y^2 + (x^2 + y^2)\left(e^{\frac{a}{2}x} + e^{-\frac{b}{2}x}\right) + e^{ax} + e^{-bx}\right),$$

или

$$u(x, y) = O\left(|z|^2\left(e^{\frac{a}{2}x} + e^{-\frac{b}{2}x}\right) + e^{ax} + e^{-bx}\right),$$

что и требовалось доказать.

Мы видим, в частности, что при $x = 0$, $z = iy$ имеем:

$$u(0, y) = O(y^2 + 1). \quad (9,2,4)$$

Теперь нам нужно, пользуясь (9,2,1), найти оценку для $v(x, y)$.

Имеет место:

Лемма 5

При $x = 0$

$$v(0, y) = O(|y|^3 + 1). \quad (9,2,5)$$

Вообще, при $|x| \leqslant c_0$ ($c_0 > 0$ — выбранная по желанию константа)

$$|v(x, y)| < c_1(|y|^3 + 1) \quad (9,2,6)$$

(в дальнейшем $c_1, c_2, \ldots$ — положительные константы).

При любом x и любом $\varepsilon > 0$:

$$v(x, y) = O(e^{(a+\varepsilon)x} + e^{-(b+\varepsilon)x})(|z|^3 + 1). \quad (9,2,7)$$

Доказательство получается из (9,2,1) применением интегральной формулы Пуассона из теории гармонических функций подобно доказательству совершенно аналогичной леммы 5 гл. 7.

Теперь мы можем получить оценку $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, которую можно сформулировать в виде леммы.

Лемма 6

При $|x| \leqslant c_0$
$$|g(z)| < c_3(|y|^3 + 1). \qquad (9,2,8)$$

При любом x и любом $\varepsilon > 0$ имеем:
$$|g(z)| = O\left(e^{(a+\varepsilon)x} + e^{-(b+\varepsilon)x}\right)(|z|^3 + 1). \qquad (9,2,9)$$

Доказательство непосредственно следует из (9,2,1), (9,2,6) и (9,2,7).

Таким образом, $g(z)$ — целая функция экспонентного типа.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9.0.2

Введем, как в § 2 гл. 7, вспомогательную функцию
$$G(z) = z^{-4}\left(g(z) - g'(0)\,z - \frac{g''(0)}{2} z^2 - \frac{g'''(0)}{6} z^3\right) \qquad (9,3,1)$$

$(g(0) = 0)$. Из (9,2,9) видим, что
$$|G(z)| = O\left(e^{(a+\varepsilon)x} + e^{-(b+\varepsilon)x}\right) \qquad (9,3,2)$$
и
$$G(iy) \in L_2(-\infty, \infty). \qquad (9.3,3)$$

Применим теорему 1.10.2 с заменой реальной оси на мнимую. Из (9,3,2) и (9,3,3) находим [см. формулу (1,10,29)]
$$G(z) = \int_{-b}^{a} e^{zt}\,\Phi(t)\,dt, \qquad (9,3,4)$$

где $\Phi(t) \in L_2(-b, a)$. Далее, при $z = x$, $G(x)$ реальна, ибо такова $g(x)$, и, стало быть, $g'(0)$, $g''(0)$, $g'''(0)$. Отсюда легко следует [см. (7,2,6)], что $\Phi(t)$ можно считать реальной; при этом [см. (9,3,1)]
$$g(z) = P_3(z) + z^4 \int_{-b}^{a} e^{zt}\,\Phi(t)\,dt, \qquad (9,3,5)$$

где $P_3(z)$ — полином степени не выше 3 с реальными коэффициентами.

Остается доказать единственность представления (9,3,5). Для двух представлений вида (9,3,5), где вместо $P_3(z)$ стоит $P_{3j}(z)$ $(j = 1,2)$ и вместо $\Phi(t)$ стоят $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$, имеем: $P_{31}(z) - P_{32}(z)$ имеет $z = 0$ четырехкратным корнем, так что $P_{31}(z) \equiv P_{32}(z)$. Тогда $\Phi_1(t) = \Phi_2(t)$ почти для всех t по известной теореме теории преобразований Фурье.

Этим теорема 9.0.2 полностью доказана.

§ 4. ПЕРЕХОД К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 9.0.3

Доказательство теоремы 9.0.3 гораздо более затруднительно, хотя протекает полностью с помощью аппарата гл. 7. Пусть б. д. з. с х. ф. $\varphi(t)$ имеет спектр, рациональный справа от α $\alpha \in (0, a)$ и лежащий в $[-b, a]$, так что

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-b}^{a} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG_1(u) +$$

$$+ \int_{0}^{\alpha} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG_2(u) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(\exp\left(it \frac{a_j}{q} \mu\right) - 1\right), \qquad (9,4,1)$$

a_j — целые; $\frac{a_1}{q}\mu > \alpha$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$; $\lambda_j > 0$. Если введем функцию $G(u)$ — такую, что $dG(u) = dG_1(u)$ $(-b \leqslant u < 0)$; $dG(u) = dG_2(u)$ $(0 \leqslant u \leqslant \alpha)$; $G(u)$ — кусочно постоянная неубывающая функция со скачками $\lambda_j > 0$ в точках $\frac{a_j \mu}{q}$.

Не нарушая общности, будем считать $\beta = 0$ $(\gamma \geqslant 0)$. Можно сделать замену $t \to \frac{qt}{\mu}$, что сводится к тому, что мы будем полагать: $q = \mu = 1$. Тогда (9,4,1) переходит в формулу:

$$\ln \varphi(t) = -\gamma t^2 + \int_{-b}^{\alpha} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG(u) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (\exp)(ita_j) - 1). \qquad (9,4,2)$$

Пусть Y — случайная величина, отвечающая (9,4,2); составим выражения (9,1,3) — (9,1,8); какой-либо компоненте Y_1 случайной величины Y отвечает $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, согласно (9,1,6). В формуле (9,1,11) положим $y = 2\pi m$, где m — какое-либо целое число. Тогда

$$\int_{\alpha}^{a_k} e^{xu} \sin^2 \frac{yu}{2}\, dG(u) = \int_{\alpha}^{a_k} e^{xu} \sin^2 \pi m u\, dG(u) = 0, \qquad (9,4,3)$$

ибо правее α функция $G(u)$ имеет точки роста только в целых точках a_j. Таким образом, имеем:

$$0 \leqslant u(x, 0) - u(x, 2\pi m) \leqslant 4\pi\gamma m^2 + 2 \int_{-b}^{a} e^{xu} \sin^2 \pi m u\, dG(u). \quad (9,4,4)$$

Будем считать $x \geqslant 1$; рассуждая, как в § 1, получим

$$\int_{-b}^{a} e^{xu} \sin^2 \pi m u\, dG(u) = O(e^{\alpha x}(x^2 + m^2)),$$

так что (9,4,4) дает

$$0 \leqslant u(x, 0) - u(x, 2\pi m) \leqslant c_1 e^{ax}(x^2 + m^2). \qquad (9,4,5)$$

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ 9.0.2

Непосредственное применение доказанной нами ранее теоремы 9.0.2 дает

$$g(z) = P_3(z) + z^4 \int_{-b}^{a_k} e^{zt} \Phi_1(t)\, dt, \tag{9,5,1}$$

где $P_3(z)$ — полином степени не выше 3, с реальными коэффициентами, а $\Phi_1(t) \in L^2[-b, a]$ — реальная функция.

Рассуждая теперь, как при доказательстве леммы 8 гл. VII [см. (7,2,9)], получим

$$g(z) = z^5 \int_{-b}^{a_k} e^{zt} \Phi(t)\, dt + P_4(z), \tag{9,5,2}$$

где $\Phi(t)$ — реальная абсолютно непрерывная функция, а $P_4(z)$ — полином степени не выше 3, с реальными коэффициентами.

Теперь действуем, как в § 3 гл. 7. Будем исследовать в интервале (α, a_k) пятую разность $\Delta^5 \Phi(t)$ [см. (7,3,1)]. Полагая

$$g_0(z) = g(z) - P_4(z), \tag{9,5,3}$$

найдем из (9,5,2) [см. (7,3,4)]

$$g_0(z) = \int_{-b}^{a_k} \frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{zt}) \Phi(t)\, dt. \tag{9,5,4}$$

Полагая, как в § 3 гл. 7, $\operatorname{Re} g_0(z) = u_0(x, y)$, находим из (9,5,4)

$$u_0(x, y) = \int_{-b}^{a_k} \frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{xt} \cos yt) \Phi(t)\, dt. \tag{9,5,5}$$

Далее, введя обозначения (7,9,6) и пользуясь (7,3,8) и (9,4,5), найдем:

Лемма 7

При целых m и $x \geqslant 1$

$$|u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)| < c_2 e^{\alpha x} (x^2 + m^4). \tag{9,5,6}$$

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАТОРА $F(\Lambda, u_0)$

Далее мы действуем совершенно аналогично § 4 и следующим гл. 7. Поскольку все же будут небольшие отличия в рассуждениях, воспроизведем их в основном. Пусть $\{\gamma_m\}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ — набор реальных чисел под условием

$$|\gamma_m| < \frac{A_1(x)}{(m+1)^{20}}. \tag{9,6,1}$$

Составим четный ряд Фурье

$$\Lambda(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos 2\pi mt. \qquad (9,6,2)$$

В правой части (9,5,6) при заданном x будем полагать $y = 2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), умножать на γ_m и складывать; в силу (9,6,1), это законно делать под знаком интеграла в (9,5,4).

Полученный результат обозначим $F(\Lambda, u_0)$. Ввиду (9,6,1) ряд (9,6,2) можно не менее 18 раз дифференцировать по t. Простой подсчет дает

$$F(\Lambda, u_0) = \int_{-b}^{a_k} \frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t)\, dt. \qquad (9,6,3)$$

Далее, формально имеем:

$$F(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m u_0(x, 2\pi m). \qquad (9,6,4)$$

Покажем, что ряд (9,6,4) будет сходящимся (даже абсолютно).

Имеем:

$$F(\Lambda, u_0) = u_0(x, 0) \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m + F_1(\Lambda, u_0), \qquad (9,6,5)$$

где

$$F_1(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m [u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)], \qquad (9,6,6)$$

$$|F_1(\Lambda, u_0)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| |u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)|.$$

В силу (9,5,6) имеем:

$$|F_1(\Lambda, u_0)| < c_2 e^{\alpha x} A_1 x^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{(m+1)^{20}} = c_3 x^2 A_1(x) e^{\alpha x}. \qquad (9,6,7)$$

Эта оценка нужна будет далее.

Далее, следуя § 4 гл. 7, рассматриваем уравнение

$$\frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{xt} \Gamma(t, x)) = e^{xt} U(t, x), \qquad (9,6,8)$$

где $U(t, x)$ непрерывна по t при каждом x, и его частное решение

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{24} \int_0^t e^{x(v-t)} (t-v)^4 U(v, x)\, dv. \qquad (9,6,9)$$

Пусть $h>0$ — любое число такое, что t и $t+5h$ лежат в интервале $(a_k-1,\ a_k)$. Дальнейшие рассуждения имеют целью доказать соотношение

$$\Delta^5 \Phi(t) = 0 \tag{9,6,10}$$

для всех $t \in (a_k-1,\ a_k)$, что, как и в гл. 7, требует вспомогательных рассуждений.

Конкретизируем построение $U(v,\ x)$. Пусть при заданном малом $h>0$, входящем в построение $\Delta^5\Phi(t)$, выбирается ξ_0; $0<\xi_0 \leqslant \frac{h}{100}$ и $t_0 \in (a_k-1,\ a_k)$ такое, что при $j=0,1,2,3,4,5$.

$$(t_0+jh-\xi_0,\ t_0+jh+\xi_0) \subset (a_k-1,\ a_k). \tag{9,6,11}$$

Пусть $W(\xi)$—непрерывная функция, исчезающая при $|\xi| \geqslant \xi_0$. С помощью $W(\xi)$ строим функцию $U(v,\ x,\ t_0)$ по формуле (7,4,10).

Лемма 8

При каждом $x \geqslant 1$ функция $\Gamma(t,\ x)$, в окрестности каждого целого $t=m \geqslant 0$, равна 0.

При $0 \leqslant t=m \leqslant a_k-1$ это очевидно; вообще для всех $t \in (0,\ a_k-1)$ это очевидно в силу (9,6,11). Отсюда же наше утверждение явствует для окрестности $t=a_k-1$. Далее, при $t=a_k$ это получается прямым подсчетом, как при доказательстве леммы 10 в § 4 гл. 7 [см. (7,4,11)]. Далее, при $v>a_k$ функция $U(v,\ x,\ t_0)=0$, так что $\Gamma(t,\ x)$ не меняется при $v>a_k$ и, стало быть, $\Gamma(t,\ x)=0$ $(t>a_k)$. Этим лемма доказана.

Заметим, что функция $\Gamma(t,\ x)$ может отличаться от 0 только на сегменте $[a_k-1,\ a_k]$. Рассмотрим функцию $\Gamma(t+ +a_k-1,\ x)$, которая может быть отличной от 0 только в $[0,1]$, и, беря только ее значения в $[0,1]$, периодически продолжим с периодом 1. Новую периодическую функцию аргумента t при данном x обозначим $\Gamma^{(1)}(t,\ x)$. Имеем:

$$\Gamma^{(1)}(t,\ x) = \Gamma(t,\ x) \quad \text{при} \quad t \in [a_k-1,\ a_k]. \tag{9,6,12}$$

Из (9,6,12) явствует, что

$$\Gamma^{(1)}(m,\ x) = 0 \tag{9,6,13}$$

при любом целом m. Будучи периодической, $\Gamma^{(1)}(t,\ x)$ уже не может быть отличной от 0 только в $[a_k-1,\ a_k]$. Однако дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Gamma^{(1)}(t,\ x)) = e^{xt}U(t,\ x,\ t_0) \tag{9,6,14}$$

удовлетворяется при $t \in [a_k-1,\ a_k]$, ибо там имеет место (9,6,12).

Оно может не удовлетворяться вне этого сегмента.

Будем рассматривать построенную нами функцию $\Gamma^{(1)}(t, x)$ для t_0, h, ξ_0 таких, что

$$t_0 \pm \xi_0 \in \left(a_k - \frac{1}{2}, a_k\right); \; t_0 + 5h \pm \xi_0 \in \left(a_k - \frac{1}{2}, a_k\right), \tag{9,6,15}$$

так что $t_0 > a_k - \frac{1}{2}$. Построим по данным t_0, h, ξ_0 функцию $U(v, x, t_0)$, согласно (7,4,10). Тогда

$$U(v, x, t_0) = 0 \quad \text{при} \quad v \leqslant a_k - \frac{1}{2}, \tag{9,6,16}$$

так что, согласно (9,6,9), имеем: $\Gamma(t, x) = 0$ при $t \leqslant a_k - \frac{1}{2}$ и

$$\Gamma^{(1)}(t, x) = 0; \; t \in \left[m, m + \frac{1}{2}\right] \tag{9,6,17}$$

для любого целого m.

Введем теперь основную функцию

$$\Lambda(t, x) = \Gamma^{(1)}(t, x) + \Gamma^{(1)}(1 - t, x) \tag{9,6,18}$$

Это — четная функция аргумента t при каждом x. Далее, в силу (9,6,13),

$$\Lambda(m, x) = 0 \tag{9,6,19}$$

при любом целом m; $\Lambda(t, x) = 0$ в окрестности $t = m$.

Рассмотрим подробнее поведение $\Lambda(t, x)$ в основном сегменте $[a_k - 1, a_k]$. Имеем, согласно (9,6,17),

$$\Gamma^{(1)}(1 - t, x) = \Gamma^{(1)}(a_k - t, x) = 0 \quad \text{при} \quad t \in \left[a_k - \frac{1}{2}, a_k\right].$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \Lambda(t, x) &= \Gamma^{(1)}(t, x) \quad \text{при} \quad t \in \left[a_k - \frac{1}{2}, a_k\right] \\ \Lambda(t, x) &= \Gamma^{(1)}(1 - t, x) \quad \text{при} \quad t \in \left[a_k - 1, a_k - \frac{1}{2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{9,6,20}$$

Далее следуем § 5 гл. 7.

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ ЛЕММЫ И. М. ВИНОГРАДОВА

Конкретизируем теперь выбор $W(\xi)$ в виде „стаканчика И. М. Виноградова“. При заданном t_0 будем считать $\xi_0 = \xi_0(t_0, x)$ заданной функцией x. В лемме И. М. Виноградова (см. § 4, гл. 1 и § 5, гл. 7) возьмем $r = 20$; $\Delta = \frac{\xi_0}{100}$; $\alpha = 0{,}5\Delta$; $\beta = \xi_0 - 0{,}5\Delta$.

Далее, на основании (1,4,5), имеем при $\nu \leqslant 18$

$$|W^{(\nu)}(\xi)| \leqslant c_4 \xi_0^{-18}. \tag{9,7,1}$$

При данном t_0 ξ_0 зависит от x. Полагая

$$\xi_0^{-18} = A_0(x), \tag{9,7,2}$$

найдем

$$|W^{(\nu)}(\xi)| \leqslant c_4 A_0(x). \tag{9,7,3}$$

Нам нужно теперь подробнее рассмотреть действие оператора $\frac{\partial^5}{\partial t^5}$ на функцию $e^{xt}\Lambda(t, x)$. Сперва рассмотрим сегмент $t \in [-b, a_k - 1]$. Пусть $t \in [m, m+1] \subset [-b, a_k - 1$. Тогда $\Lambda(t, x) = \Lambda(t + a_k - 1 - m, x)$.

Если $t \in \left[m + \frac{1}{2}, m + 1\right]$, то, согласно (9,6,20),

$$\Lambda(t, x) = \Gamma^{(1)}(t, x) = \Gamma(t + a_k - 1 - m, x) =$$
$$= \frac{1}{24} \int_0^{t+a_k-1-m} \exp x(v - (t + a_k - 1 - m))(t + a_k -$$
$$- 1 - m - v)^4 U(v, x, t_0)\, dv. \tag{9,7,4}$$

Если $t \in \left[m, m + \frac{1}{2}\right]$, то

$$\Lambda(t, x) = \Gamma^{(1)}(1 - t, x) =$$
$$= \Gamma(a_k + m - t, x) = \frac{1}{24} \int_0^{a_k+m-t} \exp x(v - (a_k + m - t)) \times$$
$$\times (a_k + m - t - v)^4 U(v, x, t_0)\, dv. \tag{9,7,5}$$

Заметим, что эти формулы годны и при $m = a_k - 1$, $t \in [a_k - 1, a_k]$.

Лемма 9

$$\left|\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x))\right| < c_5 x^5 \exp(x(t + 5h)). \tag{9,7,6}$$

Заметим, что $\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x))$ состоит из ограниченного числа членов вида $ae^{xt}x^\nu \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu}\Lambda(t, x)$; $0 \leqslant \nu \leqslant 5$; $0 \leqslant \mu \leqslant 5$.

Согласно (9,7,4), (9,7,5) и (7,4,10), $\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu}\Lambda(t, x)$ состоит из ограниченного числа членов, полученных от дифференцирования. При этом члены, содержащие $\exp x(v - (t + a_k - 1 - m)$ и $\exp x(v - (a_k + m - t))$ по модулю меньше 1, а $|U(v, x, t_0)| \leqslant c_6 e^{5xh}$ по (7,4,10). Это и доказывает (9,7,6).

Мы будем пользоваться (9,7,6) при оценке одной части интеграла (9,6,3). Именно из (9,7,6) заключаем:

$$\left| \int\limits_{-b}^{a_k-1} \frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t)\, dt \right| <$$

$$< c_5 x^5 \exp(x((a_k-1)+5h)) \int\limits_{-b}^{a_k-1} |\Phi(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c_5 x^5 \exp(x((a_k-1)+5h)). \qquad (9,7,7)$$

Таким образом [см. (9,6,3)],

$$F(\Lambda, u_0) = \int\limits_{a_k-1}^{a_k} \frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t)\, dt +$$

$$+ Bx^5 \exp[(a_k-1)+5h]\, x, \qquad (9,7,8)$$

где B, как и ранее, ограниченная величина, не всегда одна и та же.

Исследуем теперь основной сегмент $[a_k-1, a_k]$. При $t \in \left(a_k - \frac{1}{2}, a_k\right)$, $\Lambda(t, x) = \Gamma^{(1)}(t, x)$, согласно (9,6,20) и (9,6,14), имеем уравнение:

$$\frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{xt} \Lambda(t, x)) = e^{xt} U(t, x, t_0). \qquad (9,7,9)$$

Пусть теперь $t \in \left(a_k - 1, a_k - \frac{1}{2}\right)$. Для таких значений t,

$$\Lambda(t, x) = \Gamma^{(1)}(1-t, x) = \Gamma^{(1)}(-t, x) = \Gamma(2a_k - 1 - t, x) =$$

$$= \frac{1}{24} \int\limits_0^{2a_k-1-t} \exp x[v - (2a_k - 1 - t)]\, (2a_k - 1 -$$

$$- t - v)^4 U(v, x, t_0)\, dv. \qquad (9,7,10)$$

Надлежит получить оценку для $\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt} \Lambda(t, x))$. Применяя те же рассуждения, что и при выводе оценки (9,7,6), найдем снова оценку вида (9,7,6).

$$\frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{xt} \Lambda(t, x)) < c_7 x^5 \exp(x(t+5h)). \qquad (9,7,11)$$

Как явствует из предыдущего, [см. (9,7,3)], периодическая функция $\Lambda(t, x)$ при каждом $x \geqslant 1$ дифференцируема по крайней мере 18 раз. При этом важно отметить, что, в силу условия (9,6,15), $\Lambda_t^{(\nu)}(m, x) = 0$ при всех целых m и целых $\nu \geqslant 0$, ибо $\Lambda(t, x)$ обращается в 0 в окрестности каждого целого числа $t=m$. Найдем оценку производных $\Lambda(t, x)$. При $t\in\left(a_k-\frac{1}{2}, a_k\right)$ достаточно для этого оценить произведение $\Gamma^{(1)}(t, x)$.

Лемма 10

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}\Gamma^{(1)}(t, x)\right| < c_8 x^{18} A_0(x) e^{5hx} \tag{9,7,12}$$

при $0\leqslant\nu\leqslant 18$.

В самом деле, $\Gamma^{(1)}(t, x)$—периодическая функция и поэтому можно считать $t\in[a_k-1, a_k]$. Тогда

$$\Gamma^{(1}\cdot(t, x)=\Gamma(t, x)=\frac{1}{24}\int_0^t e^{x(v-t)}(t-v)^4 U(v, x, t_0)\,dv.$$

По построению $U(v, x, t)$ имеем $\Gamma(t, x)=0$ при $0\leqslant t\leqslant t_0-\xi_0$ и $\Gamma(t, x)=0$ при $t_0+5h+\xi_0\leqslant t\leqslant a_k$. Далее, из выражения для $\Gamma(t, x)$, принимая во внимание (9,7,3), непосредственно дифференцируя и оценивая $U(v, x, t_0)$ с использованием (7,4,10), получаем неравенство (9,7,12).

§ 8. ПОВЕДЕНИЕ РЯДА ФУРЬЕ ДЛЯ $\Gamma^{(1)}(t, x)$.

Функция $\Gamma^{(1)}(t, x)$, будучи периодической и дифференцируемой не менее 18 раз, разлагается в ряд Фурье

$$\Gamma^{(1)}(t, x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m\cos 2\pi mt+b_m\sin 2\pi mt. \tag{9,8,1}$$

Для a_m и b_m имеет место оценка

$$|a_m|+|b_m|<c_9\frac{x^{18}A_0(x)e^{5xh}}{(m+1)^{16}}. \tag{9,8,2}$$

Доказательство такое же, как для оценки (7,5,10) в гл. 7. Так же, как в § 5 гл. 7 [формулы (7,5,11) — (7,5,13)], имеем:

$$\Lambda(t, x)=\Gamma(t, x)+\Gamma(1-t, x)=\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m\cos 2\pi mt, \tag{9,8,3}$$

$$|\gamma_m|<\frac{c_{10}x^{18}A_0(x)e^{5xh}}{(m+1)^{16}}, \tag{9,8,4}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m=\frac{\Lambda(0, x)+\Lambda(1, x)}{2}=0. \tag{9,8,5}$$

Вернемся к формулам (9,6,3) и (9,6,4)

$$F(\Lambda,\ u_0)=\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m u_0(x,\ 2\pi m)=\int_{-b}^{a_k}\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t,\ x))\Phi(t)\,dt. \quad (9,8,6)$$

Из (9,8,5) и (9,6,5) находим $F(\Lambda,\ u_0)=F_1(\Lambda,\ u_0)$, и потому из (9,6,7), (9,6,1) и (9,8,3) находим

$$|F(\Lambda,\ u_0)|<c_{11}x^{20}\Lambda_0(x)\exp(\alpha+5h)x. \quad (9,8,7)$$

Обратимся теперь к формуле (9,7,8). Выделим из нее первый член

$$I=\int_{a_k-1}^{a_k}\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t,\ x))\Phi(t)\,dt. \quad (9,8,8)$$

Положим

$$I_1=\int_{a_k-\frac{1}{2}}^{a_k}\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t,\ x))\Phi(t)\,dt,$$

$$I_2=\int_{a_k-1}^{a_k-\frac{1}{2}}\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t,\ x))\Phi(t)\,dt,$$

так что $I=I_1+I_2$. При этом, в силу (9,7,11),

$$|I_2|<c_{12}x^5\exp\left(a_k-\frac{1}{2}+5h\right)x. \quad (9,8,9)$$

Теперь обратимся к I_1. В силу (9,7,9), имеем:

$$I_1=\int_{a_k-\frac{1}{2}}^{a_k}e^{xv}U(v,\ x,\ t_0)\Phi(v)\,dv. \quad (9,8,10)$$

Функция $U(v,\ x,\ t_0)$ выражается формулой (7,4,10). Положим

$$F(t_0+\xi)=\Delta^5\Phi(t_0+\xi) \quad (9,8,11)$$

и будем считать, что

$$t_0\pm\xi_0\in\left(a_k-\frac{1}{2},\ a_k\right);\ t_0+5h\pm\xi_0\in\left(a_k-\frac{1}{2},\ a_k\right). \quad (9,8,12)$$

Следуя рассуждениям § 6 гл. 7 [см. (7,6,7)] имеем:

$$I_1=\exp(t_0+5h)x\int_{-\xi_0}^{\xi_0}W(\xi)F(t_0+\xi)\,d\xi. \quad (9,8,13)$$

§ 9. ДАЛЬНЕЙШИЕ ОЦЕНКИ

Лемма 11

Пусть $(\alpha, \beta) \subset \left[a_k - \frac{1}{2}, a_k\right]$. При всяком заданном достаточно малом $h \leqslant \delta_0(\alpha, \beta)$ и для всех $t_0 \in [\alpha, \beta]$ будем иметь;

$$F(t_0) = 0. \tag{9,9,1}$$

Пусть задан интервал $(\alpha, \beta) \subset \left[a_k - \frac{1}{2}, a_k\right]$ и пусть

$$t_0 \pm 5{,}01\, h \in \left(a_k - \frac{1}{2}, a_k\right). \tag{9,9,2}$$

Мы можем доказывать (9,9,1) (см. § 6, гл. 7), дословно повторяя рассуждения указанного § 6 гл. 7. По заданному $\varepsilon > 0$, выбираем $u_0 = u_0(t_0, \varepsilon)$ под условием (7,6,10); выбираем ξ_0, согласно (7,6,11); имеем (7,6,12) и ввиду (7,6,13) имеем (7,6,14). Отсюда при $\varepsilon < \frac{1}{8}$ находим (7,6,15). Далее, учитывая (9,8,9) и (9,7,8), находим из (7,6,15)

$$|F(\Lambda, u_0)| > \frac{\xi_0}{4} F(t_0) \exp(t_0 + 5h)\, x +$$
$$+ Bx^5 \exp\left(a_k - \frac{1}{2} + 5h\right) x. \tag{9,9,3}$$

Примем во внимание (9,9,2), и выберем x столь большим, чтобы было $\xi_0 = \frac{1}{x^2}$ [см. (7,6,11)]. Тогда, при $x > x_0 > 1$ имеем из (9,9,3)

$$|F(\Lambda, u_0)| \geqslant \frac{1}{8} |F(t_0)|\, x^{-2} \exp(t_0 + 5h)\, x. \tag{9,9,4}$$

С другой стороны, оценим $|F(\Lambda, u_0)|$ сверху. Имеем (9,8,7), где, полагая $\xi_0 = \frac{1}{x^2}$, и учитывая (9,7,2), находим $A_0(x) = \xi_0^{-18} = x^{36}$. Таким образом,

$$|F(\Lambda, u_0)| < c_{13}\, x^{56} \exp(\alpha + 5h)\, x \tag{9,9,5}$$

при $x > x_0$.

Здесь $\alpha < a_1 \leqslant a_k$. Оставляя пока в стороне крайний случай $a_1 = a_k$, будем считать $\alpha < a_1 < a_k$. В этом случае, в (9,9,4) имеем: $t_0 + 5h \geqslant a_k - \frac{1}{2} > a_1 > \alpha$. Если $F(t_0) \neq 0$, то при $x \to \infty$ (9,9,4) противоречит (9,9,5). Итак, в этом случае $(a_1 < a_k)$ лемма 11 доказана.

§ 10. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 9.0.3

Из леммы 11 вытекает лемма, аналогичная лемме 14 § 7 гл. VII (см. 7.7.1) при $t \in \left(a_k - \frac{1}{2},\ a_k\right)$

$$\Phi(t) = P_4^{(0)}(t), \tag{9,10,1}$$

где $P_4^{(0)}(t)$ — полином степени не выше 4.

Вернемся к § 7 [формулы (9,5,2) и (9,5,3)]. Положим

$$I_1(z) = \int_{a_k - \frac{1}{2}}^{a_k} e^{zt}(\alpha_0 t^4 + \alpha_1 t^3 + \alpha_3 t^2 + \alpha_3)\,dt, \tag{9,10,2}$$

$$I_2(z) = \int_{-b}^{a_k - \frac{1}{2}} e^{zt}\Phi(t)\,dt. \tag{9,10,3}$$

Имеем:

$$g_0(z) = z^5 I_1(z) + z^5 I_2(z). \tag{9,10,4}$$

Прямым вычислением находим

$$z^5 I_1(z) = \exp(a_k z)(\beta_0 z^4 + \beta_1 z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_3 z + \beta_4) + \\ + \exp\left(a_k - \frac{1}{2}\right) z(\gamma_0 z^4 + \gamma_1 z^3 + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z + \gamma_4);$$

β_i, γ_i — реальные константы.

Лемма 12

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0.$$

Из (9,10,3) выводим

$$|z^5 I_2(z)| = B|z|^5 \exp\left(a_k - \frac{1}{2}\right)x. \tag{9,10,5}$$

Далее имеем:

$$z^5 I_1(z) = \exp(a_k z)(\beta_0 z^4 + \beta_1 z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_3 z + \beta_4) + \\ + B|z|^5 \exp\left(a_k - \frac{1}{2}\right)x.$$

Подставляя эти выражения в (9,10,4), находим

$$g_0(z) = \exp(a_k z)(\beta_0 z^4 + \beta_1 z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_3 z + \beta_4) + \\ + B|z|^4 \exp\left(a_k - \frac{1}{2}\right)x. \tag{9,10,6}$$

Обратимся к формуле (7,9,6) с заменой $u(x, y)$ на $u_0(x, y) = \operatorname{Re} g_0(z)$. Применяя (7,9,7) и рассуждая, как это делалось там, получим $\beta_0 = 0$. Используя (9,4,5), находим

$$u_0(x, 0) = \exp[a_k x](\beta_1 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x + \beta_4) + Bx^4 \exp\left[\left(a_k - \frac{1}{2}\right)x\right],$$

$$u_0(x, 2\pi m) = \exp[a_k x](\beta_1(x^3 - 3x\,4\pi^2 m^2) + \beta_2(x^2 - 4\pi^2 m^2) + \\ + \beta_3 x + \beta_4) + B|z|^4 \exp\left[\left(a_k - \frac{1}{2}\right)x\right].$$

В силу (9,4,5), находим при $x \geqslant 1$

$$0 \leqslant u_0(x, 0) - u_0(x, 2\pi m) = \exp[a_k x](\beta_1 12m^2\pi^2 x + \beta_2 4\pi^2 m^2) + \\ + B|z|^4 \exp\left[\left(a_k - \frac{1}{2}\right)x\right] = Be^{\alpha x}(x^2 + m^2),$$

откуда при $x \to \infty$ заключаем, что $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 0$. В дальнейшем мы покажем, что и $\beta_3 = 0$, но это будет характерно лишь для множителя при $\exp(a_k z)$, но не для остальных членов формулы вида (9,0,7).

Переименуем теперь β_3 в α_k, β_4 в β_k, соответственно индексу числа a_k. Из (9,10,4) находим

$$g_0(z) = \exp(a_k z)(\alpha_k + \beta_k z) + \exp\left(a_k - \frac{1}{2}\right)z(\gamma_0 z^4 + \gamma_1 z^3 + \\ + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z + \gamma_4) + \int\limits_{-b}^{a_k - \frac{1}{2}} e^{zt}\Phi(t)\,dt. \qquad (9,10,7)$$

Лемма 13

Существует полином $Q(t)$ степени $\leqslant 4$ — такой, что

$$z^5 \int\limits_0^{a_k - \frac{1}{2}} e^{zt} Q(t)\,dt = \exp\left(a_k - \frac{1}{2}\right)z(\gamma_0 z^4 + \\ + \gamma_1 z^3 + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z + \gamma_4) + \gamma_5. \qquad (9,10,8)$$

Доказательство см. в лемме 16 § 8 гл. 7 (7,8,7); там берется сегмент $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ вместо $\left[0, a_k - \frac{1}{2}\right]$, что несущественно:

$$\Phi_1(t) = \Phi(t) + Q(t);\ t \geqslant 0;\ \Phi_1(t) = \Phi(t);\ t < 0. \quad (9,10,9)$$

Имеем из (9,10,7) — (9,10,9)

$$g_1(z) = g_0(z) - \exp[a_k z](\alpha_k + \beta_k z) - \gamma_4 = \\ = z^5 \int\limits_{-b}^{a_k - \frac{1}{2}} e^{zt}\Phi_1(t)\,dt. \qquad (9,10,10)$$

Здесь $g_1(z)$ — целая функция, ведущая себя совершенно так же, как $G_0(z)$ в смысле интересующего нас поведения ее реальной части. Если $u_1(x, y) = \operatorname{Re}[\exp[a_k z](\alpha_k + \beta_k z) - \gamma_4]$, то легко подсчитать, что $u_2(x, 0) - u_2(x, 2\pi m) = 0$ для целых m. Ввиду этого, полагая $G_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$, находим из (9,5,6)

$$|u_1(x, 2\pi m) - u_1(x, 0)| < c_9 a^{ax}(x^2 + m^2). \qquad (9,10,11)$$

Поэтому мы можем действовать с помощью формулы (9,10,10), как и ранее.

При подходящей $\Lambda(t, x)$, периодической по t при каждом x с периодом 1, четной и имеющей достаточно быстро сходящийся ряд Фурье, составляем, подобно (9,6,3), равенство

$$F(\Lambda, u_1) = \int_{-b}^{a_k - \frac{1}{2}} \frac{\partial^4}{\partial t^4}(e^{xt}\Lambda(t, x))\Phi_1(t)\,dt. \qquad (9,10,12)$$

По формуле (7,4,10) составляем функцию $U(v, x, t_0)$, где

$$t_0 \pm 5{,}01\,h \in \left[a_k - 1,\ a_k - \frac{1}{2}\right]$$

и

$$\Gamma_1(t, x) = \frac{1}{24}\int_0^t e^{x(v-t)}(t-v)^4 U(v, x, t_0)\,dv. \qquad (9,10,13)$$

Тогда получим $\Gamma_1(0, x) = \Gamma_1(a_k, x) = 0$ (см. § 6), и вообще $\Gamma(n, x) = 0$ при любом целом $n \geqslant 0$. Вводим периодическую функцию $\Gamma_1^{(1)}(t, x)$, которая совпадает с $\Gamma_1(t, x)$ при любом x на сегменте $[a_k - 1, a_k]$ и далее продолжается периодически. Имеем $\Gamma_1^{(1)}(n, x) = 0$ при любом целом n, и каждое целое число n окружено интервалом, где $\Gamma^{(1)}(t, x) = 0$. Далее $\Gamma_1^{(1)}(t, x) = 0$ при $t \in [t_0 + 5h + \xi_0, a_k]$, так как оно не изменяется на этом сегменте. Составим, как в (9,6,18), основную функцию

$$\Lambda(t, x) = \Gamma_1^{(1)}(t, x) + \Gamma_1^{(1)}(1 - t, x). \qquad (9,10,14)$$

Имеем: $\Lambda(t, x) = \Gamma_1^{(1)}(t, x) = \Gamma_1(t_1 x)$ при $t \in \left[a_k - 1, a_k - \frac{1}{2}\right]$, ибо там $\Gamma_1^{(1)}(1 - t, x)$. Это сильно облегчает дело. Из соотношения $\Lambda(t, x) = \Gamma_1(t, x)$, при $t \in \left[a_k - 1, a_k - \frac{1}{2}\right]$, и (9,10,13) находим

$$\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x)) = \frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Gamma_1(t, x)) = e^{xt}U(t, x, t_0), \qquad (9,10,15)$$

откуда

$$F(\Lambda, u_1) = \int_{-b}^{a_k - \frac{1}{2}} e^{xv}U(v, x, t_0)\Phi_1(v)\,dv. \qquad (9,10,16)$$

Отсюда, как и ранее, приходим к выводу, что при любом $(\alpha, \beta)\subset\left[a_k-1,\ a_k-\frac{1}{2}\right]$ и $h\leqslant h_0(\alpha, \beta)$ заданном, для всех $t\in(\alpha, \beta)$ будет

$$\Delta^5\Phi_1(t)=0. \tag{9,10,17}$$

Но $\Phi_1(t)=\Phi(t)+Q(t)$ при $t\in(\alpha, \beta)$, где $Q(t)$ — полином степени $\leqslant 4$, так что $\Delta^5 Q(t)=0$ при $t\in(\alpha, \beta)$, $h\leqslant h_0(\alpha, \beta)$. Отсюда, как и ранее, находим, что $\Phi(t)=P_4(t)$ (полином степени $\leqslant 4$ при $t\in\left[a_k-1,\ a_k-\frac{1}{2}\right]$). В силу непрерывности $\Phi(t)$, $P_4(t)=P_4^{(0)}(t)$ [см. (9,10,1)].

Используя (9,10,10), имеем непосредственно

$$\begin{aligned} g_1(z)=\exp\left(a_k-\frac{1}{2}\right)z(\gamma_0 z^4+\gamma_1 z^3+\gamma_2 z^2+\gamma_3 z+\gamma_4)+ \\ +\exp(a_k-1)\,z(\delta_0 z^4+\delta_1 z^3+\delta_2 z^2+\delta_3 z+\delta_4)+ \\ +z^5\int_0^{a_k-1} e^{zt}\Phi_1(t)\,dt \end{aligned} \tag{9,10,18}$$

(γ_i, δ_i — константы, не всегда одни и те же).

Далее, как и в (9,10,8), вводим полином $Q_1(t)$ степени $\leqslant 4$ — такой, что

$$\begin{aligned} z^5\int_0^{a_k-1} e^{zt}Q_1(t)\,dt=\exp(a_k-1)\,z\times \\ \times(\delta_0 z^4+\delta_1 z^3+\delta_2 z^2+\delta_3 z+\delta_4)+\delta_5. \end{aligned} \tag{9,10,19}$$

Имеем, таким образом,

$$\begin{aligned} g_1(z)=\exp\left(a_k-\frac{1}{2}\right)z(\gamma_0 z^4+\gamma_1 z^3+\gamma_2 z^2+\gamma_3 z+\gamma_4)-\delta_5+ \\ +z^5\int_{-b}^{a_k-1} e^{zt}\Phi_2(t)\,dt, \end{aligned} \tag{9,10,20}$$

где $\Phi_2(t)=\Phi_1(t)+Q_1(t)$, $(t\geqslant 0)$; $\Phi_2(t)=\Phi(t)$; $(t<0)$.

Лемма 14

В формуле (9,10,20) $\gamma_0=\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=0$.

Доказательство такое же, как для леммы 17 § 8 гл. 7. Соотношение (7,8,10) надо заменить на (9,10,11).

Таким образом (9,10,20) превращается в соотношение

$$g_1(z)+\delta_5=z^5\int_{-b}^{a_k-1} e^{zt}\Phi_2(t)\,dt. \tag{9,10,21}$$

Полагая $g_1(z)+\delta_5 = g_2(z) = u_2(x, y) + iv_2(x, y)$, получим как в (9,10,11),

$$|u_2(x, 2\pi m) - u_2(x, 0)| < c_{14} e^{\alpha x}(x^2 + m^2). \qquad (9,10,22)$$

Если теперь $\alpha < 1_1 \leqslant a_k - 1$, можем осуществить такие же рассуждения, как были ранее, с заменой числа a_k на число $a_k - 1$; для сегмента же $[\alpha, a_1]$ предыдущие рассуждения будут проходить лишь при $t_0 > \alpha$. Рассуждая последовательно описанным образом, придем к формуле

$$g_0(z) = \sum_{n=1}^{a_k} \exp(nz)(\alpha_n + \beta_n z) + z^5 \int_{-b}^{\alpha} e^{zt}\Phi_0(t)\,dt, \qquad (9,10,23)$$

где $\Phi_0(t)$ абсолютно непрерывна в $[-b, 0]$ и в $[0, \alpha]$.

Ввиду этого, интегрируя по частям в формуле (9,10,23) и употребляя лемму 13 с заменой $a_k - \frac{1}{2}$ на α, а также учитывая (9,5,3) приходим к формуле типа (9,0,7)

$$g(z) = P_3(z) + \sum_{n=1}^{a_k} \exp(nz)(\alpha_n + \beta_n z) + $$
$$+ z^4 \int_{-b}^{\alpha} e^{zt}\Phi(t)\,dt, \qquad (9,10,24)$$

где $\Phi(t)$ суммируема с квадратом в $[-b, \alpha]$.

Остается доказать еще дополнительное утверждение теоремы 9.0.7. Достаточно доказать, что $\alpha_{a_k} \geqslant 0$, $\beta_{a_k} = 0$. Для этого заметим, что если $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то

$$u(x, 0) - u(x, y) \geqslant 0 \qquad (9,10,25)$$

при всех y. Из (9,10,24) имеем при $x \geqslant 1$:

$$u(x, 0) - u(x, y) = e^{a_k x}(\alpha_{a_k} + \beta_{a_k} x) - \alpha_{a_k} e^{a_k x}\cos a_k y -$$
$$- \beta_{a_k} e^{a_k x}(x\cos a_k y - y \sin a_k y) + O(|z|^4 e^{(a_k - 1)x}). \qquad (9,10,26)$$

Пусть $\beta_{a_k} \neq 0$. Если $\beta_{a_k} > 0$ то при достаточно большом целом x и $y = 2\pi x^2 - \frac{\pi}{2a_k}$ неравенство (9,10,25) будет нарушено. Если $\beta_{a_k} < 0$, то при таком же x и $y = 2\pi x^2 + \frac{\pi}{2a_k}$ неравенство (9,10,25) также нарушится. Таким образом, $\beta_{a_k} = 0$ и (9,10,26) переходит в соотношение

$$u(x, 0) - u(x, y) = 2\alpha_{a_k} e^{a_k x}\sin^2\frac{a_k y}{2} + B|z|^3 e^{(a_k - 1)x}, \qquad (9,10,27)$$

откуда ясно, что для выполнения (9,10,25) необходимо условие $\alpha_{a_k} \geqslant 0$.

Этим теорема 9.0.3 доказана. Для доказательства теоремы о спектре, рациональном левее $\beta \leqslant 0$, $\beta > -b$, нужно в формуле (9,4,1) заменить переменную t на $(-t)$ и провести такие же рассуждения.

§ 11. СЛУЧАЙ „ДВУСТОРОННЕ РАЦИОНАЛЬНОГО" СПЕКТРА

В случае, когда в формуле (9,0,4) спектр рационален правее точки $\alpha \in [0, a)$ и левее точки $-\beta \in (-b, 0]$, можем, не нарушая общности, записать соответствующую х. ф. в виде

$$\ln \varphi(t) = -\gamma t^2 + \int_{-\beta}^{\alpha} (e^{itu} - 1 - itu)\, dG(u) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k_1} \lambda_j \left(\exp\left(\frac{ita_j}{q}\mu\right) - 1\right) + \sum_{j=1}^{k_{-1}} \lambda_{-j}\left(\exp\left(-\frac{ita_{-j}}{q}\nu\right) - 1\right), \quad (9,11,1)$$

где a_j, a_{-j} — целые, $\mu > 0$, $\nu > 0$, q — целое (не нарушая общности берем одно и то же q для обеих частей спектра); $\lambda_j > 0$, $\lambda_{-j} > 0$; $\alpha < \frac{a_1 \mu}{q}$; $\beta < \frac{a_{-1}\nu}{q}$, суммы в (9,11,1) могут быть и пустыми. Далее, можем считать $a_{k_1} = q$; $a_{k_{-1}} = q$.

Согласно теореме 9.0.3, будем иметь представление вида (9,0,7) для логарифмов х. ф. любых компонент б. д. з., отвечающего (9,11,1), и аналогичное представление для них же с учетом отрицательных частот и заменой $\int_{-b}^{\alpha}$ на $\int_{-\beta}^{a}$. Однако то, что будет иметь место соответствующее „двустороннее представление", не совсем тривиально.

Теорема 9.11.1

Каждая компонента б. д. з. с х. ф. вида (9,11,1) *имеет х. ф., отвечающую формуле*

$$\ln \varphi_1(t) = P_3(it) + t^4 \int_{-\beta}^{\alpha} e^{itu} \Phi(u)\, du + \sum_{n=1}^{q} (\alpha_n + \beta_n it)\left(\exp\frac{itn\mu}{q} - 1\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{q} (\alpha'_n + \beta'_n it)\left(\exp\left(-\frac{itn\nu}{q}\right) - 1\right). \quad (9,11,2)$$

При этом если $n = a_k$ наибольшее число $\leqslant q$, для которого $\alpha_{a_k} + i\beta_{a_k} \neq 0$, то $\alpha_{a_k} > 0$, $\beta_{a_k} = 0$. Аналогичное высказывание имеет место для отрицательных пуассоновых частот в (9,11,2).

Согласно теореме 9.0.3, для $\ln\varphi_1(t)$ будем иметь представление вида (9,0,7) и представление аналогичного вида с учетом отрицательных пуассоновых частот. Соответственно лемме 13 $\left(\text{с заменой в ней } a_k-\frac{1}{2} \text{ на } n\leqslant q\right)$ можно каждое из наших двух представлений привести к виду

$$\ln\varphi_1(t)=P_{3j}(it)+t^4\int\limits_{-\nu}^{\mu}e^{itu}f_j(u)\,du \quad (j=1,2), \qquad (9,11,3)$$

где $f_j(u)$ интегрируема с квадратом; $f_1(u)$ является на интервале (α,μ) полиномом, вычисляемым соответственно (9,0,7), и то же касается $f_2(u)$ на интервале $(-\nu,\beta)$. Далее, в силу единственности представления (9,11,3) (теорема 9.0.2), $P_{31}(t)=$ $=P_{32}(t)$; $f_1(u)=f_2(u)$ почти везде. Стало быть, имеем представление (9,11,3), где $f_1(u)$ есть полином известного нам вида почти везде на интервале (α,μ) и другой полином известного нам вида почти везде на интервале $(-\nu,-\beta)$. Произведя интегрирование и снова применяя лемму 13 $\left(\text{с заменой } a_k-\frac{1}{2}\right.$ $\left.\text{на } \alpha \text{ или } -\beta\right)$, приходим к формуле (9,11,2).

Теорема 9.11.2

Если $\alpha=\beta=0$ и весь спектр F рационален, то всем компонентам F отвечают х. ф. *вида*

$$\ln\varphi_1(t)=\sum_{n=1}^{a_k}(\alpha_n+\beta_n it)\left(\exp\left(\frac{itn}{q}\mu\right)-1\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{a'_{k'}}(\alpha'_n+\beta'_n it)\left(\exp\left(-\frac{itn^{\nu}}{q}\right)-1\right)+P_2(it), \qquad (9,11,4)$$

где

$$\mu\geqslant 0,\ \nu\geqslant 0;\ \alpha_{a_k}\geqslant 0,\ \alpha'_{a'_{k'}}\geqslant 0;\ \beta_{a_k}=\beta'_{a'_{k'}}=0;$$

$$P_2(it)=-\gamma_1 t^2+\gamma_2 it;\ \gamma_1\geqslant 0.$$

Из формулы (9,11,2) вытекает (9,11,4), где $P_2(it)$ — полином степени не выше 3. Положим $P_3(z)=\gamma_0 z^3+\gamma_1 z^2+\gamma_2 z+\gamma_3$.

Докажем, что $\gamma_0=\gamma_3=0$; $\gamma_1\geqslant 0$, так что

$$P_3(it)=-\gamma_1 t^2+\gamma_2 it. \qquad (9,11,5)$$

Для этого положим $\frac{it\mu}{q}=z$, так что получим из (9,11,4)

$$g(z)=\ln\varphi_1\left(-\frac{iq}{\mu}z\right)=\sum_{n=1}^{k}(\alpha_n+\beta_n z)\times$$
$$\times(\exp nz-1)+P_3(z)+\rho(z), \qquad (9,11,6)$$

где $|\rho(z)|=B\exp(-\alpha_0 x)|y|$; $\alpha_0>0$, $x\geqslant 1$.
Положим $g(z)=u(x, y)+iv(x, y)$; пусть $y=2m\pi$, m — целое. Тогда

$$u(x, 0)-u(x, 2m\pi)=-3\gamma_0 x(2\pi m)^2+$$
$$+\gamma_1(2\pi m)^2+B\exp(-\alpha_0 x)|2\pi m|.$$

Далее, $u(x, 0)-u(x, 2m\pi)\geqslant 0$. Отсюда при $x\to\infty$ находим $\gamma_0=0$. Далее, если $\gamma_1<0$, то при $m=1$, $x\to\infty$ получаем противоречие. Наконец, $\ln\varphi_1(0)=0$, откуда $\gamma_3=0$, что и доказывает (9,11,4).

§ 12. ПЕРЕХОД К ТЕОРЕМЕ 9.0.4

Пусть в формуле (9,0,6) a_{j+1} делится на a_j ($j=1,2,\ldots, m-1$).

Не нарушая общности, считаем, что $\mu=q=1$. Согласно теореме 9.0.3, для всякой компоненты соответствующего з. р. имеем представление (9,0,7) (где считаем $\mu=q=1$). Полагая $it=z$, $\ln\varphi(t)=\ln\varphi(-iz)=g(z)$ и удерживая только такие n, для которых $\alpha_n+i\beta_n\neq 0$, запишем (9,0,7) в виде

$$g_1(z)=P_3(z)+\int_{-b}^{a}e^{zu}\Phi(u)\,du+\sum_{n=1}^{m}(\alpha_n+\beta_n z)\times$$
$$\times(\exp(g_n z)-1). \qquad (9,12,1)$$

Надо доказать, что $\alpha_n>0$, $\beta_n=0$ $(n\leqslant m)$. Полагая $g(z)=$ $=u_1(x, y)+iv_1(x, y)$, получим из (9,1,11)

$$0\leqslant u_1(x, 0)-u_1(x, y)\leqslant\gamma y^2+2\int_{-b}^{a}e^{xu}\sin^2\frac{yu}{2}\,dG(u), \qquad (9,12,2)$$

где $G(u)$, при $u>\alpha$, кусочно постоянная функция с точками роста, определенными (9,0,6) и нашими дополнительными условиями делимости.

Мы имеем: $X=X_1+X_2$, где X_1 и X_2 — независимые компоненты, и компонента X_2 отвечает $g_2(z)=g(z)-g_1(z)$. В формуле (9,12,1) считаем, что $0<g_1 g_2<\ldots<g_m$. Мы начнем с доказательства того, что числа h_n совпадают с некотоыми из чисел a_j в формуле (9,0,6). Пусть

$$\frac{Q}{k}\leqslant g_m\leqslant Q, \qquad (9,12,3)$$

где $\frac{Q}{k}$ и Q — соседние числа a_j в формуле (9,0,6). По конструкции чисел a_j, все числа a_j правее Q будут кратны Q, а левее будут делить $\frac{Q}{k}$. Из (9,12,1) находим

$$u_1(x,\ 0)-u_1(x,\ y)=e^{g_m x}\Big[2(\alpha_m+\beta_m x)\sin^2\frac{g_m y}{2}+ \\ +\beta_m y\sin(g_m y)\Big]+B(|z|^3+1+\exp(g_m-1)x]. \quad (9,12,4)$$

Далее, из (9,12,2) и (9,12,3) имеем:

$$0\leqslant u_1(x,\ 0)-u_1(x,\ y)\leqslant\gamma y^2+\sum_j\rho_{n_j}\sin^2\frac{Qn_j y}{2}\exp(Qn_j x)+ \\ +B\exp\left(\frac{Q}{k}x\right), \quad (9,12,5)$$

где $\rho_{n_j}>0$, n_j — целые числа, каждое из которых делит последующее.

Докажем, что $g_m=Q$. Пусть это не так, и $g_m<Q$. Положим $y=\frac{2\pi}{Q}$ в (9,12,4) и (9,12,5). Из (9,12,5) найдем

$$0\leqslant u(x,\ 0)-u\left(x,\ \frac{2\pi}{Q}\right)\leqslant\frac{4\gamma\pi^2}{Q^2}+B\exp\left(\frac{Q}{k}x\right). \quad (9,12,6)$$

Из (9,12,4)

$$u_1(x,\ 0)-u_1\left(x,\ \frac{2\pi}{Q}\right)=\exp(g_m x)\Big[2(\alpha_m+\beta_m x)\sin^2\frac{\pi g_m}{Q}+ \\ +\beta_m\frac{2\pi}{Q}\sin\frac{2\pi g_m}{Q}\Big]+B(|z|^3+1+\exp(g_m-1)x). \quad (9,12,7)$$

Так как $0<g_m<Q$, то $\sin^2\frac{\pi g_m}{Q}>0$, а $\frac{Q}{k}<g_m\,(k\geqslant 2)$ [см. (9,12,3)]. Если $\beta_m\neq 0$, то при $x\to\infty$ получается противоречие между (9,12,6) и (9,12,7). Полагаем $\beta_m=0$.

Если $\alpha_m\neq 0$, то при $x\to\infty$ снова имеем противоречие между (9,12,6) и (9,12,7). Но $\alpha_m+\beta_m i\neq 0$. Таким образом, должно быть $g_m=Q$. В (9,12,4) полагаем $g_m=Q$ и в (9,12,5) берем $y=\frac{2\pi}{Qn_1}$.

Отсюда находим

$$0\leqslant u_1(x,\ 0)-u_1\left(x,\ \frac{2\pi}{Qn_1}\right)\leqslant\frac{4\pi^2\gamma}{Q^2n_1}+ \\ +\rho_{n_1}\sin^2\frac{\pi}{n_1}\exp(x,\ Q)+B\left(\frac{Q}{k}x\right). \quad (9,12,8)$$

Сопоставляя это с (9,12,4) при $g_m=Q$, видим, что при $x\to\infty$ согласование между (9,12,8) и (9,12,4) может быть только при $\beta_m=0$. Итак, $\beta_m=0$. Покажем, что $\alpha_r>0$. Не может быть

$\alpha_r=0$, так как $\alpha_r+\beta_r z\neq 0$. Пусть $\alpha_r<0$. При $x\to\infty$, $y=\frac{\pi}{g_m}$ из (9,12,4) находим $u_1(x,0)-u_1\left(x,\frac{\pi}{g_m}\right)<0$, что невозможно. Итак, $\beta_r=0$, $\alpha_r>0$.

Допустим, что для чисел m, $m-1,\ldots,r_1+1$ доказано, что соответствующие числа $\beta_m,\ldots,\beta_{r_1+1}$ равны 0; $\alpha_m,\ldots,\alpha_{r_1+1}$ — неотрицательны, а соответствующие пуассоновы частоты (для $\alpha_i\neq 0$) совпадают с некоторыми из пуассоновых частот α_j (напомним, что каждая из этих частот делит предыдущую). Пусть $\alpha_{r_1}+\beta_{r_1}z\neq 0$; соответствующий член в (9,12,1) будет $(\alpha_{r_1}+\beta_{r_1}z)\times$ $\times(\exp(g_{r_1}z)-1)$. Пусть

$$\frac{Q}{k}<g_{r_1}\leqslant Q;\ k\geqslant 2, \tag{9,12,9}$$

где Q — одна из пуассоновых частот α_j, а $\frac{Q}{k}$ — соседняя частота. Докажем, что $g_{r_1}=Q$. Пусть это не так, и $g_{r_1}<Q$. Заметим, что для числа $g_i>g_{ri}$ числа g_i совпадают с некоторыми пуассоновыми частотами α_j и каждое из них делит предыдущее.

В силу этого из (9,12,1) находим

$$u_1(x,\ 0)-u_1(x,\ y)=\exp(g_r x)\Big[2(\alpha_{r_1}+\beta_{r_1}x)\sin^2\frac{g_{r_1}y_1}{2}+$$
$$+\beta_{r_1}y\sin(g_{r_1}y)\Big]+2\sum_{j=r_1+1}^{r}\exp(g_j x)\sin^2\frac{g_j y}{2}+$$
$$+B(|z|^3+1+\exp(g_{r_1}-1)x). \tag{9,12,10}$$

С другой стороны, воспользуемся (9,12,5), где Q взято из (9,12,2). Полагая $y=\frac{2\pi}{Q}$, из (9,12,5) найдем

$$0\leqslant u_1(x,\ 0)-u_1\left(x,\ \frac{2\pi}{Q}\right)\leqslant\frac{4\gamma\pi^2}{Q^2}+B\exp\left(\frac{Q}{k}x\right). \tag{9,12,11}$$

Далее, из (9,12,10), учитывая, что числа $g_j(j=r_1+1,\ldots,r)$ делятся, как следует из предыдущего, на Q, находим

$$u_1(x,\ 0)-u_1(x,\ y)=\exp(g_{r_1}x)\Big[2(\alpha_{r_1}+\beta_{r_1}x)\sin^2\frac{\pi g_{r_1}}{Q}+$$
$$+\beta_{r_1}\frac{2\pi}{Q}\sin\left(\frac{\pi g_{r_1}}{Q}\right)\Big]+B(|z|^3+1+\exp(g_{r_1}-1)x). \tag{9,12,12}$$

Так как $\frac{Q}{k}<g_{r_1}<Q$, то $\sin^2\frac{\pi g_{r_1}}{Q}>0$. Отсюда видим, что если $\beta_{r_1}\neq 0$, то при $x\to\infty$ равенство (9,12,12) вступает в противоречие с (9,12,11).

Итак, $\beta_{r_1}=0$. Если $\alpha_{r_1}\neq 0$, то при $x\to\infty$ снова получаем противоречие. Итак, $\alpha_{r_1}=0$ и $\alpha_{r_1}+\beta_{r_1}z\equiv 0$, что невозможно. Приходится допустить, что $g_{r_1}=Q$. В (9,12,10) полагаем $g_{r_1}=Q$ и берем $y=\frac{2\pi}{Qn_1}$ в формуле (9,12,11). Отсюда находим (9,12,8).

С другой стороны, числа $g_j(j=r_1+1, \ldots, r)$ в (9,12,10) все делятся на Qn_1, так что

$$u_1(x,\ 0)-u_1\left(x,\ \frac{2\pi}{Qn_1}\right)=e^{Qx}\left[2(\alpha_{r_1}+\beta_{r_1}x)\sin^2\frac{\pi}{n_1}+\right.$$

$$\left.+\beta_{r_1}\frac{2\pi}{Qn_1}\sin\frac{2\pi}{n_1}\right]+B(|z|^3+1-\exp(g_{r_1}-1)x). \quad (9,12,13)$$

С другой стороны, из (9,12,5) при $y=\frac{2\pi}{Qn_1}$ находим

$$0\leqslant u_1(x,\ 0)-u_1\left(x,\ \frac{2\pi}{Qn_1}\right)\leqslant\frac{4\pi\gamma}{Q^2 n_1^2}+$$

$$+\rho_{r_1}\sin^2\left(\frac{\pi}{n_1}\right)\exp(Qx)+B\exp\left(\frac{Qx}{k}\right). \qquad (9,12,14)$$

Сопоставляя (9,12,13) и (9,12,12), видим, что $\beta_{r_1}=0$, иначе при $x\to\infty$ получится противоречие. Покажем, что $\alpha_{r_1}>0$. Мы имеем: $\alpha_{r_1}<0$, иначе $\alpha_{r_1}+\beta_{r_1}z\equiv 0$, что невозможно. Тогда должно быть $\alpha_{r_1}<0$. В (9,12,10) полагаем $g_{r_1}=Q$, $\beta_{r_1}=0$, $y=$ $=\frac{2\pi}{g_{r_1+1}}$. При этом $\sin^2\frac{g_j y}{2}=0$ $(j=r_1+1, \ldots, r)$; $\sin^2\frac{g_{r_1}y}{2}=$ $=\sin^2\frac{\pi g_{r_1}}{g_{r_1+1}}>0$. При $\alpha_{r_1}<0$ и $x\to\infty$ получаем $u_1(x,\ 0)-$ $-u_1\left(\frac{2\pi}{g_{r_1+1}}\right)<0$, что невозможно. Итак, $\alpha_{r_1}>0$, ч. т. д.

Итак, в (9,12,1) $\alpha_n\geqslant 0$, $\beta_n=0$ $(n=1,2,\ldots, r)$; числа g_n входят в набор пуассоновых частот a_j. Для $n=1$ в (9,12,13) вместо $B(|z|^3+1+\exp(g_{r_1}-1)x)$ надлежит поставить $B(|z|^3+$ $+1+\exp\alpha x)$. Это доказывает теорему 9.0.4.

Рассмотрим теперь случай двусторонне рационального спектра, отвечающего формуле (9,11,1). Имеет место теорема.

Теорема 9.12.1

Если в двусторонне рациональном спектре б. д. з. F типа (9,11,1) *всякое число a_j делит последующее a_{j+1} $(j\leqslant k_1-1)$ и всякое число a_{-j} делит число a_{-j-1} $(j\leqslant k_{-1}-1)$, то каждая компонента F имеет спектр вида* (9,11,2), *где всякое n, для которого $\alpha_n+\beta_n i\neq 0$, входит в систему чисел a_j и $\alpha_n>0$, $\beta_n=0$; всякое n, для которого $\alpha'_n+\beta'_n i\neq 0$, входит в систему чисел a_{-j},* и $\alpha'_n>0$, $\beta'_n=0$.

Для доказательства присоединяем к изложенным выше рассуждениям такие же рассуждения с заменой t на $(-t)$.

Если в формуле (9,11,1) $\alpha=\beta=0$, т. е. спектр полностью рациональный, и a_j делит a_{j+1} $(j\leqslant k_1-1)$; a_{-j} делит a_{-j-1} $(j\leqslant k_{-1}-1)$, то получаем частный случай теоремы 9.0.1: если спектр F конечен и имеет вид (8,1,7) и (8,1,8), то $F\in I_0$. Надлежит перейти к случаю счетного ограниченного спектра.

§ 13. ПЕРЕХОД К СЛУЧАЮ СЧЕТНОГО СПЕКТРА

Пусть б. д. з. F имеет счетный пуассонов спектр вида (8,1,7) и (8,1,8). Логарифм х. ф. F будет выражаться формулой

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left(e^{it\mu_m} - 1 - \frac{it\mu_m}{1+\mu_m^2}\right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n} \left(e^{-it\nu_n} - 1 + \frac{it\nu_n}{1+\nu_n^2}\right), \tag{9,13,1}$$

где $\lambda_m \geqslant 0$; $\lambda_{-n} \geqslant 0$ и ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m \mu_m^2}{1+\mu_m^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{-n} \nu_n^2}{1+\nu_n^2} \tag{9,13,2}$$

сходятся, причем

$$\sum_{\mu_m<\varepsilon} \lambda_m \mu_m^2 + \sum_{\nu_n<\varepsilon} \lambda_{-n} \nu_n^2 \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{9,13,3}$$

При этом в соответствии с (8,1,7) и (8,1,8) пуассоновы частоты μ_m и ν_n, для которых $\lambda_m > 0$, $\lambda_{-n} > 0$, совпадают соответственно с рядами чисел:

$$\ldots k_{-1} k_{-2} \mu,\ k_{-1} \mu,\ \mu,\ \frac{\mu}{k_1}, \ldots, \frac{\mu}{k_1 k_2 \ldots k_s}, \ldots \tag{9,13,4}$$

$$\ldots l_{-1} l_{-2} \nu,\ l_{-1} \nu,\ \nu,\ \frac{\nu}{l_1}, \ldots, \frac{\nu}{l_1 l_2 \ldots l_s}, \ldots, \tag{9,13,5}$$

где $\ldots k_{-2}$, k_{-1}, k_1, $k_2, \ldots$ и $\ldots l_{-2}$, l_{-1}, l_1, $l_2, \ldots$ — какие-либо наборы целых чисел больших 1 (допускаются повторения). Возьмем $\beta = 0$.

Положим, как и ранее, $z = it = x + iy$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ и введем монотонные функции скачков: $G_-(u)$ со скачками λ_{-n} в точках $-\nu_n \leqslant -\nu$; $G_0(u)$ со скачками λ_{-n} в точках $-\nu_n > -\nu$ и λ_m в точках $\mu_m > \mu$; $G_+(u)$ со скачками λ_m в точках $\mu_m \geqslant \mu$. Получим

$$f(z) = \varphi(it) = \exp\left[\gamma z^2 + \int_{-\infty}^{-\nu} (e^{zu} - 1)\, dG_-(u) + \right. \\ \left. + \int_{-\nu}^{\mu} \left(e^{zu} - 1 - \frac{zu}{1+u^2}\right) dG_0(u) + \int_{\mu}^{\infty} (e^{zu} - 1)\, dG_+(u)\right]. \tag{9,13,6}$$

§ 14. СЛУЧАЙ ОГРАНИЧЕННОГО СПЕКТРА

Теперь переходим к доказательству теоремы 9.0.4 — общему случаю ограниченного спектра.

Полагая $\alpha = \frac{\mu}{k_1 k_2 \ldots k_M k_{M+1}}$, запишем (9,13,6) при указанных выше условиях в виде

$$f(z) = \exp\left[\beta_1 z + \gamma z^2 + \int_{-\nu}^{\alpha} (e^{zu} - 1 - zu)\, dG_0(u) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{M} \lambda_m \left(\left(\exp \frac{z\mu}{k_{-1} k_{-2} \ldots k_{-m}} \right) - 1 \right) \right]. \qquad (9,14,1)$$

Такая запись возможна, ибо

$$\int_0^{\alpha} \frac{u}{1+u^2}\, dG_0(u) - \int_0^{\alpha} u\, dG_0(u) = -\int_0^{\alpha} \frac{u^3}{1+u^2}\, dG_0(u)$$

есть сходящийся интеграл в силу известных условий на $G_0(u)$, и соответствующие значения могут быть отнесены к числу β_1. Аналогичная замена возможна и в формуле (9,13,6).

Полагаем теперь

$$\mu_0 = \frac{\mu}{k_1 k_2 \ldots k_M}; \quad k_0 = 1$$

$$f(z) = \exp\left[\beta_1 z + \gamma z^2 + \int_{-\nu}^{\alpha} (e^{zu} - 1 - zu)\, dG_0(u) + \right.$$

$$+ \sum_{m=0}^{M} \lambda_m (\exp(z\mu_0 k_{M+1} k_M \ldots k_m) - 1), \qquad (9,14,2)$$

Пусть X — случайная величина, отвечающая закону F, так что $E \exp(zX) = f(z)$ пусть имеем разложение $X = X_1 + X_2$, где X_1, X_2 — независимые величины. Полагая $E \exp(zX_j) = \exp g_j(z)$, мы получим, как мы знаем, целые функции $g_j(z)$; $j = 1,2$. Согласно теореме 9.0.4 имеем:

$$g_1(z) = P_3(z) + z^4 \int_{-\nu}^{\alpha} e^{zu} \Phi(u)\, du + \sum_{n=1}^{r} \alpha_n (\exp(a_n \mu_0 z) - 1),$$

где $\Phi(u)$ — суммируемая с квадратом функция; $P_3(z)$ — полином степени не выше 3; $\alpha_n > 0$, $a_n \mu_0$ совпадают с некоторыми из чисел $\mu_0 k_{M+1} k_M \ldots k_m$; $m = 0, 1, \ldots M$.

Возвращаясь к числу $\mu = k_1 \ldots k_M \mu_0$, находим

$$g_1(z) = P_3(z) + z^4 \int_{-\nu}^{\alpha} e^{zu} \Phi(u)\, du +$$

$$+ \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \left(\exp\left(z \frac{\mu}{k_1 k_2 \ldots k_m} \right) - 1 \right); \quad \alpha_m \geqslant 0.$$

Совершенно аналогично мы могли бы действовать „сразу с двух концов“, учитывая рациональность и положительных и отрицательных пуассоновых частот и теорему 9.12.1. Если — $-\beta = \frac{-\nu}{l_1 l_2 \ldots l_{N+1}}$, то получим

$$g_1(z) = P_3(z) + z^4 \int_{-\beta}^{\alpha} e^{zu}\Phi(u)\,du + \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \left(\exp\left(\frac{z\mu}{k_1 k_2 \ldots k_m}\right) - 1\right) + \\ + \sum_{n=1}^{N} \alpha'_n \left(\exp\left(-\frac{z\nu}{l_1 l_2 \ldots l_n}\right) - 1\right), \qquad (9,14,3)$$

где $P_3(z)$ и $\Phi(u)$ могут зависеть от M и N $\alpha_m \geqslant 0$, $\alpha'_n > 0$.

§ 15. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СЛУЧАЯ ОГРАНИЧЕННОГО СПЕКТРА

Введем при коэффициентах α_n и α'_n в (9,14,3) члены, обеспечивающие сходимость интегралов в (9,14,1), $-\frac{z\mu}{k_1 k_2 \ldots km}$ и $\frac{z\nu}{l_1 l_2 \ldots l_n}$. При этом введем в полином $P_3(z)$ соответствующую линейную часть и запишем

$$g_1(z) = P_{3,M,N}(z) + z^4 \int_{-\beta}^{\alpha} e^{zu}\Phi_{M,N}(u)\,du + \\ + \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \left(\exp\frac{z\mu}{k_1 k_2 \ldots k_m} - 1 - \frac{z\mu}{k_1 k_2 \ldots k_m}\right) + \\ + \sum_{n=0}^{N} \alpha'_n \left(\exp\left(-\frac{z\nu}{l_1 l_2 \ldots l_n}\right) - 1 + \frac{z\nu}{l_1 l_2 \ldots l_n}\right), \qquad (9,15,1)$$

где $P_{3,M,N}(z)$ и $\Phi_{M,N}(u)$ зависят от M и N. Если внимательно проследить доказательство теорем 9.0.4 и 9.12.1, то становится ясным важное для дальнейшего обстоятельство: изменение $\Phi_{M,N}(u)$ при увеличении чисел M и N состоит в добавлении к фиксированной суммируемой с квадратом функции $\Phi(u)$ полиномов $Q_{M,N}(u)$ и $R_{M,N}(u)$ степени $\leqslant 3$, так что

$$\int_{-\beta}^{\alpha} e^{zu}\Phi_{M,N}(u)\,du = \int_{-\beta}^{\alpha} e^{zu}\Phi(u)\,du + \\ + \int_{-\beta}^{0} e^{zu}Q_{M,N}(u)\,du + \int_{0}^{\alpha} e^{zu}R_{M,N}(u)\,du. \qquad (9,15,2)$$

К полиному $P_3(z)$ в формуле (9,14,3), как видно из того же доказательства, может добавляться константа [типа константы

δ_5 в (9, 10, 20)], мы будем считать, что она включена в полином $P_{3, M, N}(z)$. Докажем теперь лемму.

При M, $N \to \infty$ (и стало быть α и $\beta \to 0$)

$$P_{3, M, N}(z) + z^4 \int_{-\beta}^{\alpha} e^{zu} \Phi_{M, N}(u)\, du \to P(z), \qquad (9,15,3)$$

где $P(z)$ — фиксированный полином степени $\leqslant 3$, равномерно во всякой ограниченной области значений z.

Обозначим

$$P_{3, M, N}(z) + z^4 \int_{-\beta}^{\alpha} e^{zu} \Phi_{M, N}(u)\, du = T(z).$$

Из (9,15,2) видим, что при $M,N \to \infty$ имеем α, $\beta \to 0$ и $\int_{\beta}^{\alpha} e^{zu} \Phi(u)\, du \to 0$. Из (9,15,1) видим, что $T(z)$ стремится к пределу $P(z)$ при M, $N \to \infty$ равномерно по z во всякой ограниченной области значений z (ибо так ведут себя третье и четвертое слагаемые в формуле (9,15,1)). При этом $P(z)$, очевидно, целая функция z; надо доказать, что $P(z)$ — полином степени $\leqslant 3$. Из (9,15,2) видим, что

$$T(z) = e^{z\alpha} Q^{M, N}(z) + e^{-z\beta} R^{M, N}(z) + S^{M, N}(z) + \varepsilon_{M, N}(\dot{z}), \qquad (9,15,4)$$

где $Q^{M, N}(z)$, $R^{M, N}(z)$, $S^{M, N}$ — полиномы степени $\leqslant 3$, $\varepsilon_{M, N}(z) \to 0$ при M, $N \to \infty$.

Запишем $T(z) - \varepsilon_{M, N}(z)$ в виде кубического полинома, в коэффициенты которого могут входить множители $e^{z\alpha}$ и $e^{-z\beta}$;

$$T(z) = \alpha_0^{M, N} z^3 + \alpha_1^{M, N} z^2 + \alpha_2^{M, N} z + \alpha_3^{M, N} + \varepsilon_{M, N}(z) \to P(z)$$

при M, $N \to \infty$. Полагая $z = 0,1,2,3$, получаем приближенные линейные уравнения для коэффициентов $\alpha_i^{M, N}$ ($i = 0$, 1, 2, 3). Далее, так как α и $\beta \to 0$ при M, $N \to \infty$, имеем: $\alpha_i^{M, N} = \beta_i^{M, N} + \eta_i^{M, N}$, где $\beta_i^{M, N}$ не зависит от z, а $\eta_i^{M, N}(z) \to 0$, так как $e^{\alpha z} \to 1$ и $e^{-\beta z} \to 1$. Отсюда выводим, что $\beta_i^{M, N} \to \beta_i$, ($i = 0$, 1, 2, 3), где β_i — постоянные, и, стало быть, $\alpha_i^{M, N} \to \beta_i$, и $\lim\limits_{M, N \to \infty} T(z) = P(z)$ есть полином степени $\leqslant 3$, ч. т. д.

§ 16. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 9.0.1

Таким образом, из (9,15,1) находим

$$g_1(z) = P(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \left(\exp \frac{z\mu}{k_1 k_2 \dots k_m} - 1 - \frac{z\mu}{k_1 k_2 \dots k_m} \right) +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha'_n \left(\exp \left(- \frac{z\nu}{l_1 l_2 \dots l_n} \right) - 1 + \frac{z\nu}{l_1 l_2 \dots l_n} \right), \qquad (9,16,1)$$

где $\alpha_j \geqslant 0$, $\alpha'_j \geqslant 0$ и соответствующие ряды сходятся абсолютно. Для полного доказательства достаточности условий теоремы 9.0.1 в случае ограниченного пуассонова спектра нужно еще показать, что $P(z) = \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z$, где $\gamma_1 \geqslant 0$. Мы видим из (9,16,1), что $P(z)$ имеет действительные коэффициенты, ибо $g_1(z)$ действительно на действительной оси. Далее, если $g_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$, то, как мы знаем, должно быть $u_1(x, 0) - u_1(x, y) \geqslant 0$, $g(0) = 0$. Пусть $P(z) = \gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_3$. Так как $g(0)$, то из (9,2,1) видим, что $\gamma_3 = 0$. Пусть $z = x_0 + iy$, тогда

$$\operatorname{Re} P(z) = \gamma_0 x^3 - 3\gamma x_0 y^2 + \gamma_1 x_0^2 - \gamma_1 y^2 + O(|x_0| + |y|);$$

$$u_1(x_0, y) = \gamma_0 x_0^3 - 3\gamma_0 x_0 y^2 + \gamma_1 x_0^2 - \gamma_1 y^2 + O(e^{c_0 |x_0|} + |y|);$$

$$u_1(x_0, 0) = \gamma_0 x^3 + \gamma_1 x_0^2 + O(e^{c_0 |x_0|} + |y|),$$

$c_0 > 0$ — константа. Если $\gamma_0 > 0$, берем $x_0 < 0$, а если $\gamma_0 < 0$, то берем $x_0 > 0$. Выберем $|x_0|$ таким, что $|3\gamma_0 x_0| > 2|\gamma_1|$, и зафиксируем, а y будем выбирать сколь угодно большим. Тогда получим, очевидно, $u_1(x, y) > u_1(x, 0)$, что невозможно. Итак, $\gamma_0 = 0$. Если теперь $\gamma_1 < 0$, то при $x_0 = 1$ и $y \to \infty$ снова видим, что $u_1(x_0, y) > u_1(x_0, 0)$, что невозможно. Этим доказательство теоремы 9.0.1 завершается.

Мы видим, что теорема 9.0.1 в известном смысле обратна теореме 8.1.1 для случая ограниченного спектра. Однако, в то время, как в теореме 8.1.1 наличие гауссовой компоненты является существенным условием, теорема 9.0.1 верна и без этого условия.

Глава десятая

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ

Распространение теоремы 9.0.1 на общий случай б. д. з. с неограниченным спектром изложенными выше средствами не удается.

Здесь возможно высказывать различные более или менее правдоподобные гипотезы (см. гл. 13). Однако, для некоторых видов счетного спектра типа (9,13,1) с пуассоновыми частотами, подчиненными (9,13,4) и (9,13,5), где „параметры энергии“ λ_m и λ_n достаточно быстро убывают, удается доказать принадлежность соответствующих б. д. з. F и I_0; откуда, разумеется, следует, что все компоненты F имеют конечный или счетный спектр с пуассоновыми частотами, входящими в (9,13,4) и (9,13,5). Мы будем следовать, в основном, изложению автора в работе [22].

Теорема 10.0.1

Если б. д. закон F имеет х. ф. $\varphi(t)$, отвечающую формуле (9,13,1), *и пуассоновы частоты μ_m и ν_n, согласно условию теоремы, выражаются рядами чисел* (9,13,4) *и* (9,13,5), *причем при достаточно больших*

$$\ln\ln\frac{1}{\lambda_n} > c\mu_n^{1+\alpha}, \qquad \ln\ln\frac{1}{\lambda_{-n}} > c\nu_n^{1+\alpha}, \tag{10,0,1}$$

где $c>0$, $\alpha>0$ — какие-либо положительные константы, то F имеет только безгранично делимые компоненты.

Очевидно, теорема 10.0.1 содержит в себе и теорему 9.0.1, так как в случае ограниченного пуассонова спектра лишь конечное число λ_m и λ_{-n} отлично от 0 при $\mu_m > \mu$ и $\nu_n > \nu$, так что условие (10,0,1) выполнено. Однако доказательство теоремы 10.0.1 удобнее излагать после доказательств предыдущих теорем.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО СПЕКТРА

Докажем несколько основных лемм о неограниченном пуассоновом спектре. Как было пояснено выше, не нарушая общности, формулу типа (9,1,2) можем записать в виде

$$f(z)=\exp\left[\gamma z^2+\int_{-\infty}^{\nu}(e^{zu}-1)\,dG_-(u)+\int_{-\nu}^{\mu}\left(e^{zu}-1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{zu}{1+u^2}\,dG_0(u)+\int_{\mu}^{\infty}(e^{zu}-1)\,dG_+(u)\right]. \qquad (10,1,1)$$

Имеем: $f(z)=E\exp(zX)$, $X=X_1+X_2$, X_1, X_2 — независимы; $f(z)$ — целая функция;

$$E\exp(zX_j)=\exp g_j(z), \quad (j=1,2). \qquad (10,1,2)$$

Согласно теореме 4.1.1, устанавливаем, что $g_j(z)$ — целые функции, действительные на действительной оси. Эти функции, однако, уже не будут экспонентного типа, как аналогичные функции в гл. 9, и мы лишаемся основного инструмента гл. 9, теоремы Палей-Винера.

Пусть $g(z)$ есть $g_1(z)$ или $g_2(z)$; $g(z)=u(x, y)+iv(x, y)$. Совершенно аналогично § 1 гл. 9 выводим основную лемму.

Лемма 1

$$0\leqslant u(x,\ 0)-u(x,\ y)\leqslant\gamma y^2+2\int_{-\infty}^{-\nu}e^{xu}\sin^2\frac{yu}{2}\,dG_-(u)+$$

$$+2\int_{-\nu}^{\mu}e^{xu}\sin^2\frac{yu}{2}\,dG_0(u)+2\int_{\mu}^{\infty}e^{xu}\sin^2\frac{yu}{2}\,dG_{0+}(u). \qquad (10,1,3)$$

При этом весьма важно, что единственными точками роста $G_-(u)$, $G_0(u)$, $G_+(u)$ служат точки спектра (9,13,4) и (9,13,5), откуда следует, что беря, например, $y=y_m=\frac{2\pi m}{k_1k_2\ldots k_L}$, где m — любое целое число, получим справа оценку, где исчезает $\int_{\mu k_1\ldots k_L}^{\infty}\exp(xu)\sin^2\frac{y_mu}{2}\,dG_+(u)=0$. Этого рода соображения будут столь же важны для дальнейшего, как и аналогичные соображения гл. 9.

Нам следует получить оценку для $|g(z)|$ при возрастании $|z|$, для чего оценим сперва $u(x, 0)$, а затем, пользуясь (10,1,3), оценим $u(x, y)$. (Далее, c_1, c_2, ... и $\gamma_i<1$ $(i=1,2,\ldots)$ — положительные константы).

Лемма 2

$$|u(x, 0)| < c_1 \exp \ |x|(\ln(|x|+1))^{\gamma_0}, \tag{10,1,4}$$

где $0 < \gamma_0 < 1$.

Доказательство. Оценим сначала $f(x) = E\exp(xX)$ и докажем, что

$$0 < f(x) < c_2 \exp[\exp|x|(\ln x)^{\gamma_1})]. \tag{10,1,5}$$

Из (10,0,1) находим при $|x| \geqslant 2$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_m e^{|x|\mu} m &\leqslant \exp\left[|x|\mu_m - \exp(c\mu_m^{1+\alpha})\right];\\ \lambda_{-n} e^{|x|\nu} n &\leqslant \exp\left[|x|\nu_n - \exp(c\nu_n^{1+\alpha})\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10,1,6}$$

Откуда простым подсчетом находим

$$0 < f(x) < \exp\left[c_3|x|(\ln x)^{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}}\right],$$

что доказывает (10,1,4).

Далее, обращаясь к (10,1,2), находим при $z = x$

$$\begin{aligned} &\exp u_1(x, 0)\exp u_2(x, 0) =\\ &= E\exp(xX_1)E\exp(xX_2) = f(x). \end{aligned} \tag{10,1,7}$$

Введем нормальные случайные величины Y_1 и Y_2, так что X_1, X_2, Y_1, Y_2 независимы в совокупности, и $E(xY_j) = \exp(x^2)$ $(j = 1,2)$.

Из (10,1,7). выводим

$$\left.\begin{aligned} &\exp(x^2 + u_1(x, 0))\exp(x^2 + u_2(x, 0)) =\\ &= E\exp[x(X_1 + Y)]_1\\ &E\exp[x(x_1 + Y_2)] = f(x)\exp(2x^2). \end{aligned}\right\} \tag{10,1,8}$$

Далее, в силу наличия нормальных компонент Y_1 и Y_2, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} E\exp[x(X_1 + Y_2)] &> c_4\exp(c_5|x|);\\ E\exp[x(X_2 + Y_2)] &> c_4\exp(c_5|x|); \end{aligned}\right\} \tag{10,1,9}$$

(см. по этому поводу аналогичные рассуждения в гл. 9). Если бы для какого-либо x с $|x| \geqslant 1$ имели бы

$$\exp(x^2 + u(x, 0)) < (f(x) \quad \exp(2x^2))^2,$$

то из (10,1,8) нашли бы

$$\exp(x^2 + u_2(x, 0)) < (f(x))^{-1}\exp(-4x^2).$$

Учитывая, что $f(x) \geqslant 1$, получили бы противоречие со второй оценкой (10,1,9). Итак, $\exp[x^2 + u_1(x, 0)] < (f(x))^2\exp(4x^2)$. После этого из (10,1,5) следует (10,1,4).

Лемма 3

$$|u(x, y)| \leqslant \gamma y^2 + c_6 \exp\left(|x|(\ln(|x|+1))^{\gamma_0}\right). \qquad (10,1,10)$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 1 с учетом (10,1,4) и (10,1,6).

На основании (10,1,10), применяя интегральную формулу Пуассона, как пояснено в § 1 гл. 9 и подробно показано в доказательстве леммы 5 гл. 7, мы находим

$$|v(x, y)| \leqslant c_7 \exp\left[|x|(\ln|x|+1)^{\gamma_1}\right](|z|^3+1) \qquad (10,1,11)$$

(как сказано выше, $0<\gamma_i<1$ $(i=1,2,\ldots)$.

Отсюда имеем:

$$|g(z)| \leqslant c_8 \exp\left[|x|(\ln(|x|+1))^{\gamma_2}\right](|z|^3+1), \qquad (10,1,12)$$

§ 2. ИЗУЧЕНИЕ $g(z)$

Функция $g(z)$, однако, уже не будет экспонентного типа, как было в аналогичных случаях гл. 9. Полагаем:

$$g_1(z) = g(z) - g(0) - zg'(0) - \frac{z^2}{2}g''(0) - \frac{z^3}{6}g'''(0). \qquad (10,2,1)$$

Из (10,1,12) будет следовать, что функция

$$G(z) = z^{-4}g_1(z) \qquad (10,2,2)$$

есть целая функция, принадлежащая $L_2(-\infty, \infty)$ на любой вертикали

$$G(x_0+iy) \in L_2(-\infty, \infty), \qquad (10,2,3)$$

при любом фиксированном x_0.

Таким образом, применима теорема М. Планшереля о преобразовании Фурье в пространстве функций $L_2(-\infty, \infty)$.

Рассмотрим $G(iy)$. Согласно (1,3,4) и (1,3,5), существует суммируемая функция $\Phi(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ — такая, что

$$G(iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) \frac{e^{iyt}-1}{-iy}\, dt \qquad (10,2,4)$$

почти для всех y и

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} G(iy) \frac{e^{-ity}-1}{-iy}\, dy \qquad (10,2,5)$$

почти для всех t. Далее, полагая

$$G(iy, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \Phi(t) e^{ity}\, dt;$$

$$\Phi(t, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} G(iy) e^{-ity}\, dy. \qquad (10,2,6)$$

имеем:

$$G(iy) = \underset{a\to\infty}{\text{l. i. m.}}\, G(iy, a); \quad \Phi(t) = \underset{a\to\infty}{\text{l. i. m.}}\, \Phi(t, a), \qquad (10,2,7)$$

где l. i. m. (limit in mean) — знак сходимости в смысле нормы $L_2(-\infty, \infty)$. Из (10,2,2), (10,2,1) и (10,1,6) мы выводим следующее уточнение (10,2,3):

$$|G(x_0 + iy)| < \frac{c_9 \exp\left[|x_0|(\ln|x_0| + 1)^{\gamma_3}\right]}{|y| + 1}. \qquad (10,2,8)$$

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $g(z)$ ЧЕРЕЗ $\Psi(t)$

Лемма 4

При $t_1 > t \geqslant 0$ имеем, при подходящем $\alpha_0 > 0$:

$$\left|\int_t^{t_1} \Phi(u)\, du\right| < c_{10} \exp(-\exp t^{1+\alpha_1}); \qquad (10,3,1)$$

$$\left|\int_{-t_1}^{-t} \Phi(u)\, du\right| < c_{10} \exp(-\exp t^{1+\alpha_1}). \qquad (10,3,2)$$

(В дальнейшем все интегралы понимаются в смысле Лебега).

Доказательство. Для любого $\Delta > 0$ из (10,2,5) выводим

$$\int_t^{t+\alpha} \Phi(u)\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(iy) \frac{e^{-i(t+\Delta)y} - e^{-ity}}{-iy}\, dy. \qquad (10,3,3)$$

Рассмотрим в правой части $\int_{-T}^{T}$ при большом T. Так как под интегралом стоит целая функция, по теореме Коши можем заменить наш интеграл интегралом по контуру $x_0 + iy$; $|y| \leqslant T$; $x_0 = \text{const}$ и двум „перекладинам" $x \pm iT$ $(x \in (0, x_0))$. При $t > 0$, $t + \Delta > 0$ будем брать $x_0 > 0$, а при $t < 0$, $t + \Delta < 0$ считать $x_0 < 0$. Тогда при $T \to \infty$ интегралы по „перекладинам" будут стремиться к 0 [в силу (10,2,8)]. Таким образом $(t > 2)$,

$$\int_t^{t+\Delta} \Phi(u)\, du = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{x = x_0} G(z) \frac{e^{-(t+\Delta)z} - e^{-tz}}{z}\, dz. \qquad (10,3,4)$$

В силу (10,2,8) имеем при $|x_0| \geqslant 2$:

$$\left|G(z) \frac{e^{-(t+\Delta)z} - e^{-tz}}{z}\right| \leqslant \frac{c_9 e^{-x_0 t} \exp\left[|x_0|(\ln|x_0|)^{\gamma_3}\right]}{(|y| + 1)^2}. \qquad (10,3,5)$$

Выберем теперь $x_0 = \exp\left[\frac{1}{2} t^{1/\gamma_3}\right]$, тогда правая часть (10,3,5) дает

$$c_9 \exp\left[-\exp\left(\frac{1}{2} t^{1/\gamma_3}\right)\right] t + \exp\left(\frac{1}{2} t^{1/\gamma_3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma_3} t\Big] <$$

$$< c_9 \exp\left[-\frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2} t^{1/\gamma_3}\right)\right].$$

Беря в качестве $\alpha_1 > 0$ какое-либо положительное число — такое, что $1+\alpha_1 < \frac{1}{\gamma_3}$, получаем (10,3,1). Аналогично доказывается (10,3,2).

Из (10,3,1), (10,3,2), (10,2,6), (10,2,7) заключаем, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{zt}\Phi(t)\,dt$ сходится при любом z и представляет целую функцию, совпадающую с $G(z)$,

$$G(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{zt}\Phi(t)\,dt. \tag{10,3,6}$$

В самом деле, положим $\Phi_0(t)=\int\limits_t^{\infty}\Phi(u)\,du\,(t>0)$; $\Phi_1(t)=$ $=\int\limits_{-\infty}^{t}\Phi(u)\,du\,(t>0)$ [для $\Phi_0(t)$ и $\Phi_1(t)$ будем иметь оценки (10,4,1) и (10,4,2)]. Далее, имеем при $T>0$

$$\int\limits_0^{T} e^{zt}\Phi(t)\,dt=-\int\limits_0^{T} e^{zt}d\,\Phi_0(t)=e^{-zt}\Phi_0(t)\Big|_0^T+z\int\limits_0^{T} e^{zt}\Phi_0(t)\,dt.$$

При $T\to\infty$ первое слагаемое стремится к константе b_0 [в силу оценки (10,3,1) z — фиксировано], а второе представляет целую функцию в силу той же оценки. Аналогично устанавливаем, что $\lim\limits_{T\to\infty}\int\limits_{-T}^{0} e^{zt}\Phi(t)\,dt=b_1+z\int\limits_0^{\infty} e^{zt}\Phi_1(t)\,dt$ — целая функция (b_0, $b_1, \ldots$ — в дальнейшем константы).

Мы установили, таким образом, важное для дальнейшего соотношение

$$G(z)=b_2+z\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{zt}\Psi(t)\,dt, \tag{10,3,7}$$

где $\psi(t)=\Phi_0(t)\,(t\geqslant 0)$; $\psi(t)=\Phi_1(t)\,(t>0)$; функция абсолютно непрерывна на любом конечном интервале, лежащем либо целиком на положительной, либо целиком на отрицательной полуоси и

$$|\Psi(t)|<c_{10}\exp\left(-\exp|t|^{1+\alpha_1}\right). \tag{10,3,8}$$

Из (10,2,2) заключаем $g_1(z)-b_2z^4=z^5\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{zt}\Psi(t)\,dt$ или, полагая

$$g_1(z)-b_2z^4=g_2(z), \tag{10,3,9}$$

переходим к основному равенству

$$g_2(z)=z^5\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{zt}\Psi(t)\,dt; \tag{10,3,10}$$

функции $g_1(z)$ и $g_2(z)$, разумеется, не те же, что в § 1.

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ $\psi(t)$

Функцию $\psi(t)$ можно считать действительной. В самом деле, полагая $z=x$ и учитывая, что функция $g(x)$ действительна, найдем

$$g_2(x)=x^5\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\psi(t)\,dt;\quad g_2(x)=x^5\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\overline{\psi(t)}\,dt;$$

$$g_2(x)=x^5\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\frac{\psi(t)+\overline{\psi(t)}}{2}\,dt. \qquad (10,4,1)$$

Здесь функция $\frac{\psi(t)+\overline{\psi(t)}}{2}$ действительна. В правой и левой частях равенства стоят целые функции, и потому (10,4,1) верно и для любых комплексных значений x, что и доказывает наше утверждение.

Вернемся теперь к формуле (10,1,1) и спектру (9,13,4) и (9,13,5). Мы можем заменить $f(z)$ в (10,1,1) на $f(\mu z)$, не нарушая общности исследования. Это равносильно тому, чтобы положить $\mu=1$, так что можем написать

$$\ln\varphi(z)=\gamma z^2+\int_{-\infty}^{\nu}(e^{zu}-1)\,dG(u)+\int_{-\nu}^{1}\left(e^{zu}-1-\frac{zu}{1+u^2}\right)dG_0(u)+$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(\exp(a_jz)-1), \qquad (10,4,2)$$

где

$$a_j=q_1q_2\ldots q_j, \qquad (10,4,3)$$

$q_j>1$ — целые числа. Пусть m — какое-либо целое число. Применим лемму 1, полагая $y=2\pi m$. При $g(z)=u(x, y)+$ $+iv(x, y)$ получим, рассуждая как в § 6 гл. 9, при $x\geqslant 1$

$$0\leqslant u(x, 0)-u(x, 2\pi m)\leqslant 4\pi\gamma m^2+O(e^x(x^2+m^2)). \qquad (10,4,4)$$

Обратимся теперь к формуле (10,3,10). Здесь

$$g_2(z)=g(z)+P_2(z), \qquad (10,4,5)$$

где $P_2(z)$ — полином степени $\leqslant 4$. Полагаем

$$g_2(z)=u_2(x, y)+iv_2(x, y);\quad P_2(z)=p_2(x, y)+iq_2(x, y),$$

откуда, учитывая действительность коэффициентов полинома $P_2(z)$, вытекающую из его построения, получим

$$p_2(x, y)=\alpha_0(x^4-6x^2y^2+y^4)+\alpha_1(x^3-3xy^2)+$$
$$+\alpha^2(x^2-y^2)+\alpha_3x+\alpha_4 \qquad (10,4,6)$$

(α_i — константы). Из (10,4,4) найдем

$$|u_2|(x, 0) - u_2(x, 2\pi m)| \leqslant 4\pi\gamma m^2 + |p_2(x, 2\pi m)| + \\ + O(e^x(x^2 + m^2)). \qquad (10,4,7)$$

Перепишем теперь (10,3,10) в виде

$$g_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{zt})\psi(t)\,dt, \qquad (10,4,8)$$

откуда, учитывая действительность $\psi(t)$ и беря действительные части,

$$u_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\cos yt)\psi(t)\,dt. \qquad (10,4,9)$$

Далее осуществим те же конструкции, что и в § 8 гл. 9.

Нам придется употреблять новые аналитические приемы далее, где скажется бесконечность промежутка интегрирования в (10,4,9) по сравнению с конечностью этого промежутка в гл. 9.

Пусть $A_i(x)$ ($i = 1, 2 \ldots$) — некоторые положительные функции; $x \geqslant 2$; $\{\gamma_m\}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) — набор действительных чисел под условием

$$|\gamma_m| < \frac{A_1(x)}{(m+1)^{2\gamma}}. \qquad (10,4,10)$$

Составим четный ряд Фурье

$$\Lambda(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos 2\pi m t. \qquad (10,4,11)$$

В правой части (10,4,9) при заданном x будем полагать $y = 2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), умножать на γ_m и складывать; в силу (10,4,10) и оценки (10,3,8), это можно делать под знаком интеграла. Полученный результат обозначим $F(\Lambda, u_2)$. В результате законных операций получим

$$F(\Lambda, u_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x))\psi(t)\,dt. \qquad (10,4,12)$$

§ 5. ИЗУЧЕНИЕ ОПЕРАТОРА $F(\Lambda, u_2)$

Формально имеем:

$$F(\Lambda, u_2) = \sum_{m-\infty}^{\infty} \gamma_m u_2(x, 2\pi m). \qquad (10,5,1)$$

Для обоснования законности такого приравнивания докажем сходимость при всех x ряда в правой части (10,5,1)

$$F_1(\Lambda, u_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m [u_2(x, 2\pi m) - u_2(x, 0)]. \qquad (10,5,2)$$

Тогда

$$|F_1(\Lambda, u_2)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| \, |u_2(x, 2\pi m) - u_2(x, 0)|.$$

В силу (10,4,10) и (10,4,7) находим ($x \geqslant 2$)

$$|F_1(\Lambda, u_2)| \leqslant c_{11} A_1(x) x^4 e^x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^4}{(m+1)^{20}} = c_{12} x^4 A_1(x) e^x. \quad (10,5,3)$$

Далее, ряд $u_2(x, 0) \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m$ также сходится, и

$$F(\Lambda, u_0) = u_2(x, 0) \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m + F_1(\Lambda, u_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m u_2(x, 2\pi m). \quad (10,5,4)$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt} \Gamma(t, x)) = e^{xt} U(t, x), \quad (10,5,5)$$

где $U(t, x)$ — непрерывная при каждом $x \geqslant 2$ заданная функция $t \geqslant 0$. Его частным решением будет

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{24} \int_0^t e^{x(v-t)} (t-v)^4 \, U(v, x) \, dv. \quad (10,5,6)$$

Пусть a_k — какое-либо из чисел a_j вида (10,4,3), причем $k = j \geqslant 2$. Пусть $h > 0$ — любое число — такое, что $t + 5h$ и t лежат в сегменте

$$[a_k - 1, \, a_k].$$

Составим пятую разность для $\psi(t)$

$$\Delta^5 \psi(t) = \psi(t + 5h) - 5\psi(t + 4h) + 10\psi(t + 3h) - \\ - 10\psi(t + 2h) + 5\psi(t + h) - \psi(t). \quad (10,5,7)$$

Нужно доказать, что

$$\Delta^5 \psi(t) = 0 \quad (10,5,8)$$

для всех $t \in (a_k - 1, \, a_k)$.

Функцию $U(v, x)$ будем строить аналогично тому, как это делалось в гл. 9. При заданном малом h, входящем в формулу (10,5,7), выбирается ξ_0; $0 < \xi_0 \leqslant \frac{h}{100}$ и $t_0 \in (a_k - 1, \, a_k)$ — такое, что при $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$[t_0 + jh - \xi_0, \, t_0 + jh + \xi_0] \subset (a_k - 1, \, a_k). \quad (10,5,9)$$

Пусть $W(\xi)$ — непрерывная функция ξ, причем $W(\xi) = 0$ при $|\xi| \geqslant \xi_0$. Соответственно построим функцию

$$U(v, x, t_0) = W(v - t_0 - 5h) - 5e^{xh} W(v - t_0 - 4h) + \\ + 10e^{2xh} W(v - t_0 - 3h) - 10e^{3xh} W(v - t_0 - 2h) + \\ + 5e^{4xh} W(v - t_0 - h) - e^{5xh} W(v - t_0). \quad (10,5,10)$$

Совершенно аналогично рассуждениям § 8 гл. 9 доказываем лемму.

Лемма 5

Функция $\Gamma(t, x)$, определенная равенством (10,5,6) при $U(v, x) = U(v, x, t_0)$, при каждом $x \geqslant 2$ обладает свойством

$$\Gamma(m, x) = 0 \tag{10,5,11}$$

при любом $m \geqslant 0$.

Мы имеем, таким образом, $F(a_k, x) = 0$. По построению $U(v, x, t_0)$ из этого явствует, что $\Gamma(t, x) = 0$ при $t > a_k$ (ибо $t_0 + jh \in (a_k - 1, a_k); j \leqslant 5$). По тем же причинам $\Gamma(t, x) = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant a_k - 1)$. Таким образом, $\Gamma(t, x)$ может отличаться от 0 лишь при $t \in [a_k - 1, a_k]$. Построим теперь новую функцию $\Gamma^{(1)}(t, x)$, совпадающую с $\Gamma(t, x)$ при $t \in [a_k - 1, a_k]$ и далее периодически продолженную на все значения t. Имеем:

$$\Gamma^{(1)}(t, x) = \Gamma(t, x) \quad \text{при } t \in [a_k - 1, a_k]. \tag{10,5,12}$$

Очевидно,

$$\Gamma^{(1)}(m, x) = 0 \tag{10,5,13}$$

для всех целых m. В силу (10,5,12) соотношение

$$\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Gamma^{(1)}(t, x)) = e^{xt} U(t, x, t_0) \tag{10,5,14}$$

удовлетворяется при $t \in (a_k - 1, a_k)$ и может не удовлетворяться вне этого интервала.

§ 6. ПОСТРОЕНИЕ $\Lambda(t, x)$

Впредь будем рассматривать функции $\Gamma^{(1)}(t, x)$ данного типа при $U(v, x) = U(v, x, t_0)$, задаваемых (10,5,10). Пусть t_0, h, ξ_0 таковы, что

$$t_0 \pm (5h + \xi_0) \in \left(a_k - \frac{1}{2},\ a_k\right) \tag{10,6,1}$$

$\left(\text{так что } t_0 > a_k - \frac{1}{2}\right)$. Построим по данному t_0 функцию $U(v, x, t_0)$, согласно (10,5,10). Тогда

$$U(v, x, t_0) = 0 \quad \text{при } v \leqslant a_k - \frac{1}{2},$$

так что, согласно (10,5,6), имеем $\Gamma(t, x) = 0$ при $0 \leqslant t < a_k - \frac{1}{2}$ и

$$\Gamma^{(1)}(t, x) = 0; \quad t \in \left[m,\ m + \frac{1}{2}\right] \tag{10,6,2}$$

при любом целом m.

Введем теперь основную функцию

$$\Lambda(t, x) = \Gamma^{(1)}(t, x) + \Gamma^{(1)}(1 - t, x). \tag{10,6,3}$$

Это — четная функция t при каждом x и, в силу (10,5,13),

$$\Lambda(m, x) = 0 \tag{10,6,4}$$

для всех целых m. Далее,

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda(t, x) = \Gamma^{(1)}(t, x) \quad \text{при } t \in \left[a_k - \tfrac{1}{2}, a_k\right], \\ &\Lambda(t, x) = \Gamma^{(1)}(1 - t, x) \quad \text{при } t \in \left[a_k - 1, a_k - \tfrac{1}{2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10,6,5}$$

Далее действуем, как в § 7 гл. 9. Выбираем $W(\xi)$ в виде „стаканчика И. М. Виноградова"; при заданном t_0 будем считать ξ_0 зависящим от t_0 и параметра $x \to \infty : \xi_0 = \xi_0(t_0, x_0)$. Остальное берем, как в § 7 гл. 9. Имеем при $\nu \leqslant 18$

$$|W^{(\nu)}(\xi)| \leqslant c_{13}\xi_0^{-18}.$$

При заданном t_0, полагая

$$\xi_0^{-18} = A_0(x_0), \tag{10,6,6}$$

найдем

$$|W^{(\nu)}(\xi)| \leqslant c_{14}A_0(x_0). \tag{10,6,7}$$

Далее, рассматриваем действие оператора $\frac{\partial^5}{\partial t^5}$ на функцию $e^{xt}\Lambda(t, x)$. Сперва рассмотрим сегмент $(-\infty, a_{k-1})$. Совершенно аналогично рассуждениям, доказывающим лемму 3 § 7 гл. 9, находим

$$\left|\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x))\right| < c_{15}x^6 \exp[x(t + 5h)]. \tag{10,6,8}$$

Таким образом, получаем из (10,4,12)

$$F(\Lambda, u_2) = \int_{a_{k-1}}^{\infty} \frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x))\Psi(t)\,dt + \\ + Bx^6 \exp[(a_{k-1} + 5h)x] \tag{10,6,9}$$

(в дальнейшем B — ограниченное число, не всегда одно и то же). Рассмотрим поведение функции $\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x))$ при $t > a_{k-1}$. Из (10,6,5) видно, что поведение этой функции будет различным на сегментах $\left[m - \frac{1}{2}, m\right]$ и $\left[m - 1, m - \frac{1}{2}\right]$. Пусть $t \in \left[m - \frac{1}{2}, m\right]$; $m \geqslant a_{k-1} + 1$. Тогда $\Lambda(t, x) = \Gamma^{(1)}(t, x)$. Если $m = a_k$; $t \in \left[m - \frac{1}{2}, m\right]$, то $\Gamma^{(1)}(t, x) = \Gamma(t, x)$ и, в силу (10,5,14),

$$\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x)) = e^{xt}U(t, x, t_0); \; t \in \left[a_k - \tfrac{1}{2}, a_k\right].$$

Если $m > a_{k-1}$, то имеем:

$$\Lambda(t, x) = \Lambda(t - m + a_k, x) = \Gamma(t - m + a_k, x);$$

$$\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x)) = e^{x(m-a_k)}\frac{\partial^5}{\partial t^5}(\exp[x(t - m + a_k)]\Gamma(t - m + a_k - 1, x)) = e^{x(m-a_k)}e^{x(t-m+a_k)}U(t - m + a_k, x, t_0) = e^{xt}U(t - m + a_k. x, t_0). \qquad (10,6,10)$$

Введем интегралы:

$$I_{m0}(x) = \int_{m-\frac{1}{2}}^{m}\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x))\psi(t)\,dt; \qquad (10,6,11)$$

$$I_{m1}(x) = \int_{m-1}^{m-\frac{1}{2}}\frac{\partial^5}{\partial t^5}(e^{xt}\Lambda(t, x))\psi(t)\,dt; \qquad (10,6,12)$$

$$I_0(x) = \sum_{m=a_{k-1}+1}^{\infty} I_{m0}(x); \qquad (10,6,13)$$

$$I_1(x) = \sum_{m=a_{k-1}+1}^{\infty} I_{m1}(x) \qquad (10,6,14)$$

(абсолютная сходимость этих рядов, основанная на (10,3,8), легко обнаруживается из дальнейшего).

В силу (10,6,10) имеем:

$$I_0(x) = \sum_{m=a_{k-1}+1}^{\infty}\int_{m-\frac{1}{2}}^{m} e^{xt}U(t - m + a_k, x, t_0)\Psi(t)\,dt. \qquad (10,6,15)$$

§ 7. ИЗУЧЕНИЕ $I_{m1}(x)$

Изучим теперь $I_{m1}(x)$, При $t > a_{k-1}$, $t \in \left[m - 1, m - \frac{1}{2}\right]$ имеем $\Lambda(t, x) = \Gamma^{(1)}(1 - t, x) = \Gamma(1 - (t - m + 1) + a_k - 1) = \Gamma(a_k - (t - m + 1))$.

В силу (10,5,6) при $t \in \left[m - 1, m - \frac{1}{2}\right]$

$$\Lambda(t, x) = \frac{1}{24}\int_0^{a_k-(t-m+1)}\exp[x(v - (a_k - (t - m + 1)))] \times (a_k - (t - m + 1) - v)^4 U(v, x_0, t_0)\,dv. \qquad (10,7,1)$$

Обозначим это выражение, при данном m, через $T(x, t-m)$, тогда

$$I_{m1}(x) = \int\limits_{m-1}^{m-\frac{1}{2}} \frac{\partial^5}{\partial t^5}\left(e^{xt}\,T(x,\ t-m)\right)\psi(t)\,dt\,. \tag{10,7,2}$$

Имеем из (10,6,2)

$$F(\Lambda,\ u_2) = I_0(x) + I_1(x) + Bx^6 \exp\left[(a_{k-1}+5h)\,x\right]. \tag{10,7,3}$$

Далее, очевидно, в формуле (10,5,4) имеем $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \gamma_m = \Lambda(1, x) = 0$, так что $F(\Lambda,\ u_2) = F_1(\Lambda,\ u_2)$. Пользуясь (10,4,7) и оценками для γ_m, получаем, рассуждая полностью аналогично § 8 гл. 9,

$$F(\Lambda,\ u_2)\,| < c_{15}x^{28}A_0(x_0)\exp\left[x(1+5h)\right], \tag{10,7,4}$$

где $A_0(x_0)$ взято из оценки (10,6,5).

Мы получаем также оценку, вполне аналогичную оценке в § 7 гл. 9,

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}\Lambda(t,\ x)\right| < c_{17}x^{26}A_0(x_0)\,e^{5hx}. \tag{10,7,5}$$

Далее, рассуждая, как в § 10 гл. 9, находим

$$I_{m0}(t) = \exp\left[(t_0+m-a_k+5h)\,x\right]\int\limits_{-\xi_0}^{\xi_0} W(\xi)\times$$
$$\times F(t_0+m-a_k+\xi)\,d\xi, \tag{10,7,6}$$

где

$$F(t_0+m-a_k+\xi) = \Delta^5\Psi(t_0+m-a_k+\xi) \tag{10,7,7}$$

ри разности h.

§ 8. ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРИЕМЕ ХЕЛЬГЕ ФОН КОХА—ФРАГМЕНА

Для дальнейшего нам нужен будет один аналитический прием, впервые употребленный Хельге фон Кохом и разработанный далее Е. Фрагменом [78]. Он основан на элементарных соотношениях:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-e^{-e^{kx}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } k>0, \\ 1-\frac{1}{e} & \text{при } k=0, \\ 0 & \text{при } k<0. \end{cases}$$

Пусть теперь $G(\tau, x)$ — функция, имеющая не более ограниченного числа разрывов по τ, при каждом $x \geqslant 2$, $\tau \in (0, \infty)$ и пусть при каждом $x \geqslant 2$

$$|G(\tau, x)| \leqslant a_0 \exp(-\exp \tau^{1+\alpha}) e^{a_1 x}, \tag{10,8,1}$$

где $a_0 > 0$ и $\alpha > 0$ — константы. Пусть далее

$$f(x) = \int_0^\infty e^{x\tau} G(\tau, x)\, d\tau. \tag{10,8,2}$$

При этом пусть

$$|f(x)| < e^{a_1 x}; \quad x \geqslant 2 \tag{10,8,3}$$

(в дальнейшем $a_i > 0$ — константы). Имеем при $t_1 > 0$, $x \geqslant 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} f(nx)\, e^{-nxt_1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} e^{-nxt_1} \int_0^\infty e^{nx\tau} G(\tau, x)\, d\tau. \tag{10,8,4}$$

Сходимость рядов обеспечена оценкой (10,8,3). Докажем теперь, что можно переставлять порядки суммирования и интегрирования в (10,8,4). Для этого оценим $\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{nx\tau} |G(\tau, x)|\, d\tau$ при больших n. Имеем:

$$\int_0^\infty e^{nx\tau} |G(\tau, x)|\, d\tau \leqslant a_0 e^{a_1 x} \int_0^\infty e^{a_1 \tau} \int_0^\infty e^{nx\tau} \exp(-\exp \tau^{1+\alpha})\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant a_2 \exp(\ln nx)^\gamma; \qquad 0 < \gamma < 1.$$

Далее, $n! \sim \exp\left(n \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi n}\right)$, что дает более высокий порядок при любом фиксированном $x \leqslant 2$ и показывает, что операции переставимы. Переставляя их, получим

$$\int_0^\infty G(\tau, x)\,(1 - \exp(-\exp[(\tau - t_1)x]))\, d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f(nx)\, e^{-nxt_1} = Q(x, t_1). \tag{10,8,5}$$

Пусть $\rho > 0$ — сколь угодно малая фиксированная константа. Разобьем интеграл в левой части (10,8,3) на три части:

$$\int_0^{t_1-\rho} = E(0, t_1 - \rho); \quad \int_{t_1-\rho}^{t_1+\rho} = E(t_1 - \rho, t_1 + \rho); \quad \int_{t_1+\rho}^{\infty} = E(t_1 + \rho, \infty).$$

Имеем при $\tau < t_1 - \rho$

$$|E(0,\ t_1-\rho)| \leqslant \int\limits_0^{t_1-\rho} |G(\tau,\ x)|\, e^{-(\tau-t_1)x} d\tau \leqslant e^{-\rho x} \int\limits_0^{t_1-\rho} |G(\tau,\ x)|\, d\tau, \tag{10,8,6}$$

$$|E(t_1-\rho,\ t_1+\rho)| \leqslant \int\limits_{t_1-\rho}^{t_1+\rho} |G(\tau,\ x)|\, d\tau, \tag{10,8,7}$$

$$|E(t_1+\rho,\ \infty) = \int\limits_{t_1+\rho}^{\infty} G(\tau,\ x)\, d\tau + \int\limits_{t_1+\rho}^{\infty} |G(\tau,\ x)| \exp[-\exp(\rho x)]\, d\tau.$$

В силу оценки (10,8,1) получаем

$$E(t_1+\rho,\ \infty) = \int\limits_{t_1+\rho}^{\infty} G(\tau,\ x)\, d\tau + B \exp\left[-\frac{1}{2}\exp(\rho x)\right]. \tag{10,8,8}$$

§ 9. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХЕЛЬГЕ ФОН КОХА—ФРАГМЕНА

С целью применения результатов предыдущего § 8 введем функцию $G(\tau,\ x)$, определенную при $x \geqslant 2$, $\tau \geqslant 0$ и принимающую значения:

$$G(\tau,\ x) = 0 \text{ при } \tau \leqslant a_{k-1};$$

$$G(\tau,\ x) = U(\tau - m + a_k,\ x,\ t_0)\, \psi(\tau) \quad \text{при } \tau \in \left[m - \frac{1}{2},\ m\right];$$

$$G(\tau,\ x) = e^{-x\tau} \frac{\partial^5}{\partial t^5} (e^{x\tau} T(\tau - m))\, \psi(\tau) \quad \text{при } \tau \in \left[m - 1,\ m - \frac{1}{2}\right]$$

[см. (10,7,1), (10,7,2)], $m \geqslant a_{k-1} + 1$, m — целое.

Мы имеем при этом [см. определение (10,5,10) и § 9, гл.9]

$$|G(\tau,\ x)| \leqslant \exp(5x(h + \xi_0))\, |\psi(\tau)| =$$
$$= B \exp[x(5h + \xi_0)]\, e^{-e^{\tau^{1+\alpha_1}}} \tag{10,9,1}$$

при $\tau \in \left[m - \frac{1}{2},\ m\right]$, $m \geqslant 1$ — целое;

$$|G(\tau,\ x)| < \exp[x(5h + \xi_0 + \eta)]\, |\psi(\tau)| =$$
$$= B \exp[x(5h + \xi_0 + \eta)]\, e^{-e^{\tau^{1+\alpha_1}}}, \tag{10,9,2}$$

при $\tau \in \left[m - 1,\ m - \frac{1}{2}\right]$, $m \geqslant 1$ — целое; $\eta > 0$ сколь угодно мало.

Нам важны будут еще некоторые особенности поведения $G(\tau,\ x)$ при $\tau \in [a_k - 1,\ a_k]$. Из определения $G(\tau,\ x)$, в силу свойств функции $U(v,\ x,\ t_0)$, можно видеть, что $G(\tau,\ x) = 0$ в окрестности точек $a_k - 1$ и a_k. Мы выбирали точки t_0 так, что $t_0 + (5h + {}_0) \in \left(a_k - \frac{1}{2},\ a_k\right)$. Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} &G(\tau, x) = 0, \quad \tau \in [m-\rho, m+\rho]; \\ &G(\tau, x) = 0; \quad \tau \in \left[m - \frac{1}{2} - \rho, m - \frac{1}{2} + \rho\right], \end{aligned}\right\} \tag{10,9,3}$$

где $\rho > 0$ — достаточно малая константа. Будем считать, что h выбрано столь малым, что $\rho \geqslant 100\, h$.

Положим теперь $t_1 = a_k - \frac{1}{2}$ и воспользуемся формулами § 8. Из них, пользуясь оценками (10,9,1) и (10,9,2), найдем

$$|E(0, t_1 - \rho)| = Be^{-\frac{\rho x}{2}}; \tag{10,9,4}$$

$$E(t_1 - \rho, t_1 + \rho) = 0. \tag{10,9,5}$$

Присоединяя сюда (10,8,8), находим

$$Q(x, t_1) = \int\limits_{a_k - \frac{1}{2} + \rho}^{\infty} G(\tau, x)\, d\tau + Be^{-\frac{\rho x}{2}}. \tag{10,9,6}$$

Здесь $Q(x, t_1)$ взято из формулы (10,8,5), причем

$$f(nx) = I_0(nx) + I_1(nx). \tag{10,9,7}$$

Далее, полагаем $t_2 = a_k$, и точно так же получаем

$$Q(x, t_2) = \int\limits_{a_k - \rho}^{\infty} G(\tau, x)\, d\tau + Be^{-\frac{\rho x}{2}}. \tag{10,9,8}$$

Вычитая (10,9,8) из (10,9,6), найдем

$$Q(x, t_1) - Q(x, t_2) = \int\limits_{a_k - \frac{1}{2} + \rho}^{a_k + \rho} G(\tau, x)\, d\tau + Be^{-\frac{\rho x}{2}}. \tag{10,9,9}$$

Оценим теперь левую часть (10,9,9). Пользуясь (10,9,7), (10,7,3), (10,7,4), (10,6,6), найдем

$$f(nx) = Bn^6 x^6 \exp\left[(a_{k-1} + 5h)\, nx\right].$$

Отсюда, согласно (10,8,3), при $t_1 = a_k - \frac{1}{2}$, ввиду того, что $a_k \geqslant 2a_{k-1}$,

$$Q(x, t_1) = Be^{-x}. \tag{10,9,10}$$

Точно так же

$$Q(x, t_2) = Be^{-x}. \tag{10,9,11}$$

Таким образом из (10,9,9)

$$\int\limits_{a_k - \frac{1}{2} + \rho}^{a_k + \rho} G(\tau, x)\, d\tau = Be^{-\frac{\rho x}{2}}. \tag{10,9,12}$$

В силу исчезновения $G(\tau, x)$ в сегментах $[m-\rho, m+\rho]$ и $\left[m-\frac{1}{2}-\rho, m-\frac{1}{2}+\rho\right]$ имеем:

$$\int_{a_k-\frac{1}{2}}^{a_k} G(\tau, x)\,d\tau = Be^{-\frac{\rho x}{2}}. \qquad (10,9,13)$$

или

$$\int_{a_k-\frac{1}{2}}^{a_k} U(\tau, x, t_0)\,\Psi(\tau)\,d\tau = Be^{-\frac{\rho x}{2}}, \qquad (10,9,14)$$

или, соответственно (10,7,6),

$$e^{5hx}\int_{-\xi_0}^{\xi_0} W(\xi)\,e^{\xi x}F(t_0+\xi)\,d\xi = Be^{-\frac{\rho x}{2}}. \qquad (10,9,15)$$

Здесь $F(t_0+\xi)$ — непрерывная функция; выбирая $\xi_0=\frac{1}{x^2}$ и рассуждая, как в гл. 9, находим

$$F(t_0)=0. \qquad (10,9,16)$$

Так как $\psi(t)$ непрерывна, а h — любое сколь угодно малое число, то (см. § 7, гл. 7) отсюда следует, что при $t\in\left(a_k-\frac{1}{2}, a_k\right)$ функция $\psi(t)=P_{a_{k,1}}(t)$ есть полином степени $\leqslant 4$. Считая теперь $t_0\pm(5h+\xi_0)\in\left(a_k-1, a_k-\frac{1}{2}\right)$ и проводя такие же рассуждения при $t_1=a_k-\frac{1}{2}+\rho$, $t_2=a_k-\frac{1}{2}+\rho$, найдем, что $\psi(t)=P_{a_{k,2}}$ есть полином степени $\leqslant 4$ при $t\in\left(a_k-\frac{1}{2}, a_k\right)$. Продолжая те же рассуждения, найдем, что если разбить $[a_{k-1}, a_k]$ на сегменты $\left[m-1, m-\frac{1}{2}\right]$ и $\left[m-\frac{1}{2}, m\right]$, то в каждом из них непрерывная на $[a_{k-1}, a_k]$ функция $\psi(t)$ будет полиномом $P_{m1}(t)$ или $P_{m2}(t)$ степени $\leqslant 4$. Заменяя a_{k-1} на a_k и a_k на a_{k+1} и приводя те же рассуждения, находим, что это же верно для всех целых чисел $m\geqslant a_1+1=2$.

§ 10. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 10.0.1

Мы имели для функции $\psi(t)$ оценку (10,3,8). Из этой оценки непосредственно следует, что коэффициенты полиномов $P_{mj}(t)$ $(j=1,2)$ имеют оценку

$$B\exp(-\exp m^{1+\alpha_2}); \quad \alpha_2>0. \qquad (10,10,1)$$

Выполняя интегрирование $e^{zt}P_{mj}(t)$ при $j=1,2;\ m=2,3$, согласно (10,3,10), находим

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{nz}P_{n1}(z)+e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)z}P_{n2}(z)\right)Be^{|z|}(|z|^2+1). \quad (10,10,2)$$

(разумеется, у полиномов действительные коэффициенты).

Для второго слагаемого в разложении $X=X_1+X_2$ будет иметь место формула, получаемая вычитанием $g(z)$ из $\ln f(z)$ в формуле (10,1,1). Нам надлежит сперва доказать, что здесь исчезают все члены, где n не совпадает с частотами пуассонова спектра $\mu_j=\mu q_1\ldots q_j=q_1\ldots q_j=Q_j\geqslant 1$ (мы положили $\mu=1$), и члены, содержащие $n+\frac{1}{2}$ в показателе. Мы будем использовать следствие основной леммы 2 [см. (10,1,9)]. Пусть m — любое целое число; как обычно, полагаем $g(z)=u(x,y)+ + iv(x,y)$. Тогда при любом $x\geqslant 2$

$$0\leqslant u(x,0)-u\left(x\frac{2\pi m}{q_1q_2\ldots q_j}\right)=B\exp(|z|Q_{j-1})(|z|^2+1), \quad (10,10,3)$$

где $z=x+\frac{2\pi mi}{Q_j}$, $j=1,2$. При $j=0$ будем считать $q_1q_2\ldots q_j= = 1$, тогда соотношение (10,10,3) сохраняет силу. Положим

$$u(x,0)-u\left(x,\frac{2\pi m}{Q_j}\right)=f\left(x,\frac{m}{Q_j}\right). \quad (10,10,4)$$

Имеем:

$$f(x,Q_j)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{nx}P_{n,1}(x)-e^{nx}\operatorname{Re}\left(\exp\frac{2\pi mni}{Q_j}P_{n1}(z)\right)\right)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}P_{n,2}(x)-e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\operatorname{Re}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\exp\frac{2\pi m\left(n+\frac{1}{2}\right)i}{Q_j}P_{n2}(z)\right)\right)+Be^{|z|}(|z|^2+1). \quad (10,10,5)$$

Применим прием Хельге фон Коха-Фрагмена, который мы использовали в § 8. Составим

$$Q(x,t_1)=\sum_{a=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}f(nx)e^{-nxt_1}. \quad (10,10,6)$$

Как в § 8, убеждаемся, используя оценку (10,10,1), что

$$Q(x,t_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(P_{n1}(x)-\operatorname{Re}\left(\exp\frac{2\pi mni}{Q_j}\right)P_{n1}(z)\right)+$$
$$+P_{n2}(x)-\operatorname{Re}\left(\exp\frac{2\pi m\left(n+\frac{1}{2}\right)i}{Q_j}P_{n2}(z)\right)\times$$

$\times (1 - \exp(-\exp[(n-t_1)x])) + B\exp x[(1-t_1)+\eta]$, (10,10,7)
при $x \geqslant 2$, $t_1 > 1$, $\eta > 0$ — сколь угодно мало.

Исходя отсюда, покажем сперва, что полиномы $P_{n2}(z)$ тождественно обращаются в нуль. Положим $Q_j = 1$ и в формуле (10,10,7) возьмем сперва $t_1 = n_0 + \frac{1}{4}$, затем $t_1 = n_0 + \frac{3}{4}$, n_0 — какое-либо из натуральных чисел. Устремляя x к ∞, подставляя в (10,10,6) оценку (10,10,3) и вычитая полученные результаты один из другого, находим

$$\lim_{x\to\infty} P_{n_0,2} - \operatorname{Re}(e^{\pi mi} P_{n_0,2}(z)) = 0 \quad (z = x + 2\pi mi)$$

или

$$\lim_{x\to\infty} \left[P_{n_0,2}(x) + (-1)^{m+1}\operatorname{Re} P_{n_0,2}(x+2\pi mi)\right] = 0$$

для любых целых m. Отсюда без труда выводим

$$P_{n_0,2}(x) = 0; \quad n_0 = 1,2,\dots$$

После этого находим при $t_1 > Q_j - 1$; $j = 1, 2, 3$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_{n,1}(x) - \operatorname{Re}\left(\exp\frac{2\pi mni}{Q_j} P_{n1}(z)\right) \times \right.$$
$$\left. \times (1 - \exp(-\exp[(n-t_1)x]))\right] = 0.$$

Отсюда следует, что при $n \geqslant Q_{j-1} + 1$

$$\lim_{x\to\infty} \left[P_{n1}(x) - \operatorname{Re}\left(\exp\frac{2\pi mni}{Q_j} P_{n1}(z)\right)\right] = 0.$$

Отсюда элементарными рассуждениями находим, что если n не делится на Q_j, то $P_{n1}(z) \equiv 0$. Итак, если $n \geqslant Q_{j-1} + 1$ и $P_{n1}(z) \not\equiv 0$, то n делится на Q_j, таким образом, в формуле (10,10,2) остаются лишь такие $P_{n1}(z)$, для которых n совпадает с рядом чисел $Q_j = q_1 q_2 \dots q_j$. Для этих полиномов имеем $\lim\limits_{x\to\infty}[P_{n1}(x) - \operatorname{Re} P_{n1}(z)] = 0$, что без труда приводит к выводу о линейности $P_{n1}(z)$

$$P_n(z) = \alpha_n' + \beta_n' z.$$

Таким образом, из (10,10,2) находим

$$g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j + \beta_j z)\exp(Q_j z) + Be^{|z|}(|z|^2 + 1). \qquad (10,10,8)$$

Нам надо доказать, что $\alpha_j \geqslant 0$; $\beta_j = 0$. Имеем:

$$u(x, 0) - u(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[2(\alpha_j + \beta_j x)\sin\frac{Q_j y}{2} + \right.$$
$$\left. + \beta_j y \sin(Q_j y)\right]\exp(Q_j x) + Be^{|z|}(|z|^2 + 1) \geqslant 0. \qquad (10,10,9)$$

Положим $y = y_m = \frac{2\pi m}{Q_{r+1}}$; $z = x + \frac{2\pi m i}{Q_{j+1}}$. Тогда в (10,10,9) исчезнут все числа с $j > r$.

Заметим, что второе слагаемое X_2 в разложении $X = X_1 + X_2$, очевидно, должно иметь соответствующую $g(z)$ функцию вида

$$h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j' - \beta_j z) \exp(Q_j z) + Be^{|z|}(|z|^2 + 1). \quad (10,10,10)$$

Ввиду этого, если $\beta_j \neq 0$, можем выбирать его знак по произволу. Пусть $\beta_j < 0$. При заданном $y = y^{(1)} = \frac{2\pi}{Q_{j+1}}$ и $x \to \infty$ получаем $u(x, 0) - u(x, y^{(1)}) < 0$, что невозможно. Итак, $\beta_j = 0$ для всех j. Если теперь $\alpha_j < 0$, то снова выходит, что $u(x, 0) - u(x, y^{(1)}) < 0$ при достаточно больших x, что невозможно. Итак,

$$g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (\exp(Q_j z) - 1) + Be^{|z|}(|z|^2 + 1).$$

Мы положили $\mu = 1$. Чтобы избавиться от этого предположения, мы должны заменить $g(z)$ на $g(\mu z)$. Точно такая же процедура с заменой $g(z)$ на $g\left(\frac{\mu z}{k_1 k_2 \ldots k_m}\right)$ позволяет получить постепенно

$$g(z) = \sum_{\mu_j > \mu} \alpha_j (\exp(\mu_j z) - 1) + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m' \left(\exp\left(\frac{\mu z}{k_1 k_2 \ldots k_m}\right) - 1 - \right.$$

$$\left. - \frac{z\mu}{k_1 k_2 \ldots k_m}\right) + z^5 \int_{-\infty}^{\frac{\mu}{k_1 k_2 \ldots k_m}} e^{zt} \Psi(t)\, dt; \quad \alpha_j > 0, \quad \alpha_m' \geqslant 0. \quad (10,10,11)$$

Мы можем далее действовать „со второго конца“, исследуя $\psi(t)$ при $t < 0$ и беря $x \to -\infty$. Рассуждая далее, как в начале данной главы, приходим к окончательному доказательству теоремы 10.0.1.

Глава одиннадцатая

ТЕОРЕМЫ „УСТОЙЧИВОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ". ПРИМЕНЕНИЯ К ТЕОРИИ СУММИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. „α-РАЗЛОЖЕНИЯ"

§ 1. ПОНЯТИЕ „УСТОЙЧИВОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ". ТЕОРЕМЫ Н. А. САПОГОВА И О. В. ШАЛАЕВСКОГО

Общая схема теории разложения з. р., охватывающая ранее разобранные частные случаи, может быть записана так: рассматривается некоторый класс K_F з. р. и утверждается, что все компоненты F_1 — з. р. F, отвечающие разложению $F = F_1 * F_2$, содержатся в некотором классе K_{F_1} з. р. (который может иногда совпадать с F).

Понятие „устойчивости разложений" относится к последовательности з. р. $F_j(x)$, для которых рассматриваются последовательности разложений

$$F_j = F_{1j} * F_{2j} \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{11,1,1}$$

Будем говорить, что теорема о разложениях описанного выше вида обладает устойчивостью, если имеет место следующая ситуация.

Пусть $F \in K_F$ — какой-либо з. р. из класса K_F и пусть

$$L(F_j, F) = \varepsilon_j \to 0 \quad \text{при } j \to \infty, \tag{11,1,2}$$

где $L(F_j, F)$ — расстояние з. р. по П. Леви (см. [64] и введение).

Рассматриваем какие-либо разложения вида (11,1,1) и составляем выражение

$$\inf_{F^{(1)} \in K_{F_1}} L(F_{1j}, F^{(1)}) = \delta_j. \tag{11,1,3}$$

Мы имеем устойчивость разложений, если $\delta_j \to 0$ при $j \to \infty$. Проблемы устойчивости естественно связаны со свойствами компактности. В частном случае, если $K_F = K_{F_1} = N$ (N — класс нормальных з. р.), то имеет место теорема Г. Крамера.

„Устойчивость" теоремы Г. Крамера в указанном выше смысле была обнаружена впервые П. Леви [64].

Более точный результат составляют такие теоремы, где для величины δ_j дается оценка вида

$$\delta_j \leqslant \delta(\varepsilon_j), \tag{11,1,4}$$

где $\delta(\varepsilon_j)$ указывается как функция от ε_j, стремящаяся к 0 вместе с ε_j.

Впервые такие результаты были получены Н. А. Сапоговым [32, 33]. Мы приведем здесь без доказательства наиболее сильный результат Н. А. Сапогова, доказанный в [33]. Мы сформулируем его в ранее принятых обозначениях.

Теорема 11.1.1 (Н. А. Сапогов)

Для случая теоремы Г. Крамера $K_F = K_{F_1} = N$ имеем:

$$\delta_j = O\left(\ln \frac{1}{\varepsilon_j}\right)^{-1/2}. \tag{11,1,5}$$

Для случая теоремы Д. А. Райкова $K_F = K_{F_1} = P$ (класс законов Пуассона) имеется сходный результат О. В. Шалаевского [46].

Теорема 11.1.2 (О. В. Шалаевский)

Для случая теоремы Д. А. Райкова $K_F = K_{F_1} = P$ имеем:

$$\delta_j = O\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\omega}, \tag{11,1,6}$$

где ω — любое число $< \frac{1}{2}$.

Надо отметить, что теоремы 11.1.1 и 11.1.2 доказаны их авторами в упомянутых работах в более содержательной форме, чем (11,1,5) и (11,1,6): фактически указаны представители $F^{(1,j)}$ класса K_{F_1}, для которых $L(F_{1,j}, F^{(1,j)})$ имеет соответствующие оценки сверху (11,1,5) и (11,1,6).

§ 2. „УСТОЙЧИВОСТЬ" ДЛЯ ТЕОРЕМЫ 9.0.1

Рассмотрим класс б. д. з., обладающих спектром, описанным в условиях теоремы 9.0.1, т. е. счетным ограниченным спектром с пуассоновыми частотами вида (9,13,4) и (9,13,5). Обозначим $I_1(S)$ класс указанных б. д. з. с заданным спектром S описанного вида или спектрами — подмножествами S. Согласно теореме 9.0.1, все компоненты з. р. класса $I_1(S)$ принадлежат к тому же классу $I_1(S)$. Заметим еще, что если $F_1(x) \in I_1(S)$, то и $F_1(x-a) \in I_1(S)$ при любой постоянной a. Имеет место теорема.

Теорема 11.2.1

Теорема 9.0.1 обладает свойством „устойчивости", точнее, если в обозначениях § 1 положим $K_F = K_{F_1} = I_1(S)$, то

$$\delta_j \to 0 \quad \textit{при } \varepsilon_j \to 0. \tag{11,2,1}$$

Рассмотрим последовательность $\{F_j\}$ з. р., сходящихся к $F \in I_1(S)$; положим $L(F_j, F) = \varepsilon_j$ [см. (II,1,2)]. Рассмотрим какую-либо из последовательностей разложений

$$F_j = F_{1j} * F_{2j}. \tag{11,2,2}$$

Для каждого F_{1j} рассмотрим

$$\inf_{F^{(1)} \in I_1(S)} L(F_{1j}, F^{(1)}) = \delta_j \tag{11,2,3}$$

[см. (11,1,3)]. Мы должны доказать, что $\delta_j \to 0$ при $j \to \infty$.

Пусть это не так, и $\overline{\lim_{j\to\infty}} \delta_j = \eta > 0$. Выберем из (11,2,2) подпоследовательность $\{F_{1j_k}\}$, для которой $\delta_{j_k} \geqslant \frac{\eta}{2}$. Согласно теореме 5.4.1 о компактности множества представителей компонент и замечанию в начале § 2 о свойствах класса $I_1(S)$, мы можем выбрать из нашей подпоследовательности подпоследовательность представителей, сходящуюся к компоненте $F_1^{(0)}$, такой, что

$$\inf_{F^{(1)} \in I_1(S)} L(F_1^{(0)}, F^{(1)}) > \frac{\eta}{4}, \tag{11,2,4}$$

и это соотношение будет верно для любого представителя класса компонент $F_1^{(0)}$. Соответственно (11,2,2) для каждой компоненты F_{1j_k} будем рассматривать и вторую компоненту F_{2j_k} и выберем из $\{F_{2j_k}\}$ подпоследовательность представителей, сходящуюся к компоненте $F_2^{(0)}$, при этом будет

$$F_1^{(0)} * F_2^{(0)} = F^{(0)}, \tag{11,2,5}$$

где $F^{(0)}$ — представитель класса з. р. F, т. е. з. р. вида $F(x-a)$.

Но $F^{(0)} \in I_1(S)$; по теореме 9.0.1, $F_1^{(0)} \in I_1(S)$, что противоречит (11,2,4) и доказывает теорему.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ СУММИРОВАНИЯ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим последовательность серий независимых случайных величин

$$x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn_k} \tag{11,3,1}$$

(см. А. Я. Хинчин [44]) и составим их суммы

$$s_k = x_{k1} + x_{k2} + \ldots + x_{kn_k} \tag{11,3,2}$$

с з. р. $F_k(x)$. В условиях предельной пренебрегаемости, легко сводящихся к условиям

$$\min_{i<n_k} Q_{ki}(l) = \gamma_k \to 1 \quad \text{при любом } l > 0, \qquad (11,3,3)^*$$

где $Q_{ki}(l)$ — концентрация x_{ki}; класс законов, которые могут быть предельными для $F_k(x)$, совпадает с классом безгранично делимых законов I. Обширная теория (см. [6, 44]) суммирования независимых величин в условиях предельной пренебрегаемости указывает необходимые и достаточные требования для слабой сходимости $F_k(x)$ к заданному з. р. $F \in I$.

Пусть теперь $F^{(0)}$ какой-либо з. р. класса $I_1(S) \subset I$, где S — заданный пуассонов спектр вида (9,13,4) и (9,13,5), и пусть

$$L(F_k, F^{(0)}) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty, \qquad (11,3,4)$$

причем не требуется условие типа предельной пренебрегаемости (11,3,4). Пусть для суммы (11,3,2) имеем:

$$L(F_k, F^{(0)}) < \varepsilon, \qquad (11,3,5)$$

где $\varepsilon > 0$ — заданное малое число. Согласно теореме (11,2,1), обозначая через $F_{ki}(x)$ з. р. x_{ki}, получим

$$\inf_{F^{(1)} \in I(S)} L(F_{ki}, F^{(1)}) = \delta_{ki} \to 0 \text{ вместе с } \varepsilon. \qquad (11,3,6)$$

Притом это стремление равномерно по k, i. В случае выполнения условия предельной пренебрегаемости, (11,3,6) выполняется тривиальным образом, ибо все законы $\epsilon(x-a)$ (см. введение) принадлежат $I(S)$. Таким образом, условие (11,3,6) есть необходимое условие слабой сходимости $F_k(x)$ к $F^{(0)} \in I(S)$, если не требовать выполнения условия предельной пренебрегаемости.

Если б. д. з. $F \overline{\in} I_0$ (т. е. имеет неразложимые компоненты), то условие вида (11,3,6) не является необходимым для слабой сходимости F_k к F. Для того, чтобы в этом убедиться, обратимся к какой-либо из основных лемм гл. 8, например, лемме I. Пусть спектр S состоит из точек $\frac{p}{q}$ и 1, где $0 < p < q$; $q \geqslant 3$ — целое число. Согласно указанной лемме, б. д. з. F, имеющий х. ф.

$$\varphi(t) = \exp\left(-\gamma t^2 + \lambda_1 (e^{it} - 1) + \lambda_2 \left(e^{i\frac{p}{q}t} - 1\right)\right), \quad \lambda_i > 0 \ (i = 1, 2),$$

имеет компоненту с х. ф. вида

$$\varphi_1(t) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t^2 + \frac{\lambda^2}{2}(e^{it} - 1) + \frac{\lambda_2}{2}\left(e^{i\frac{p}{q}t} - 1\right) - \nu_0 \left(e^{i\frac{t}{q}} - 1\right)\right),$$

где ν_0 — достаточно малое положительное число. Вторая компонента, очевидно, б. д., и ее х. ф. $\varphi_2(t)$ может быть при

* См. § 4, гл. 5.

любом целом j представлена в виде $\varphi_2(t)=(\psi_j(t))^j$, где $\psi_j(t)$ — х. ф. Рассматривая разложения, соответствующие х. ф.,

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)(\psi_j(t))^j \quad (j=1,\ 2,\ldots),$$

видим, что для них условие $\delta_{ki}\to 0$ при $k\to\infty$ [см. (11,3,6)] не выполняется.

§ 4 «α-РАЗЛОЖЕНИЯ» БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ

Пусть S — заданный ограниченный пуассонов спектр вида (9,13,4) и (9,13,5) и $\varphi(t)$ — х. ф. б. д. з. F со спектром S: $F\in I(S)$. Рассмотрим „α-разложение“ $\varphi(t)$ (см. § 2, гл. 4)

$$(f_1(t_k))^{\alpha_1}(f_2(t_k))^{\alpha_2}\ldots(f_s(t_k))^{\alpha_s}=\varphi(t_k) \quad (k=1,\ 2,\ldots), \qquad (11,4,1)$$

где $t_k\to 0$ пробегают какую-либо последовательность различных реальных чисел; $\alpha_i>0$; $i=1,\ 2,\ldots,\ s$; $f_i(t)$ — х. ф.

Ввиду ограниченности спектра S, $\varphi(t)$ — целая функция (см. § 1, гл. 9), поэтому $f_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,s)$ — х. ф., согласно теореме 4.2.1, и равенство (11,4,1) имеет место для всех комплексных значений t_k.

Теорема 11.4.1 (Ю. В. Линник)

При наличии „α-разложения“ 11.4.1 *х. ф.* $f_j(t)$ $(j=1,\ 2,\ldots,s)$ *отвечают б. д. з., принадлежащим* $I(S)$, *т. е.* $f_j(t)$ *— х. ф. б. д. з. с пуассоновым спектром, входящим в* S.

Для доказательства заметим, что $f_j(t)$ — целые х. ф. без нулей.

Переобозначим $f_j(z)=\int\limits_{-}^{\infty}e^{zx}\,dF_j(x)$, где $F_j(x)$ — соответствующие з. р., а z — комплексное переменное; $(f_j(z))^{\alpha_j}=\exp h_j(z)$, где $h_j(z)$ — целые функции и $h_j(0)=0$. Далее рассуждаем, как в гл. 9.

Положим

$$(f_1(z))^{\alpha_1}=\exp g_1(z);\ (f_2(z))^{\alpha_2}\ldots(f_s(z))^{\alpha_s}=\exp g_2(z), \qquad (11,4,2)$$

$g_j(z)$ — целые функции, реальные при реальных z; $g_j(0)=0$ $(j=1,\ 2)$ имеем:

$$\exp g_1(z)\exp g_2(z)=\varphi(z), \qquad (11,4,3)$$

где можем, не нарушая общности, положить

$$\varphi_0(z)=\exp\left(\gamma z^2+\int\limits_{-b}^{a}(e^{zu}-1-zu)\,dG(u)\right) \qquad (11,4,4)$$

(см. гл. 9). Здесь $G(u)$ — неубывающая функция с точками роста в точках спектра S [вида (9,13,4) и (9,13,5)]; имеют место условия (9,13,2) и (9,13,3) для скачков $G(u)$ в точках S; $\gamma\geqslant 0$.

Имеем:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(z)\exp(-g_1(z))=(f_2(z))^{\alpha_1}\dots(f_s(z))^{\alpha_s};\\&\varphi(z)\exp(g_1(z))=(f_1(z))^{1+\alpha_1}(f_2(z))^{\alpha_2}\dots(f_s(z))^{\alpha_s}.\end{aligned}\right\}\quad(11,4,5)$$

Весьма важно, что функции $(f_j(z))^{\alpha_j}$, не будучи, вообще говоря, х. ф., являются хребтовыми функциями (см. § 2, гл. 3), такими же, очевидно, будут и их произведения. На основе этого (см. 3.2.10) из (11,4,5) выводим

$$\varphi(x+iy)\exp(\pm g_1(x+iy))\leqslant\varphi_0(x)\exp(\pm g_1(x)).\quad(11,4,6)$$

Эта формула отвечает (9,1,9). Далее рассуждаем, как в гл. 9. Полагая $g_1(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, выводим все нужные неравенства для $u(x, y)$, за исключением оценки сверху для $u(x, 0)$, даваемой формулой (9,1,14). Покажем, что и эта оценка верна. Имеем [см. (9,1,15) и (9,1,16)], соответственно (11,4,5)

$$\exp\left(\gamma x^2+\int_{-b}^{a}(e^{xu}-1-xu)\,dG(u)-u(x, 0)\right)=$$
$$=(f_2(x))^{\alpha_2}\dots(f_s(x))^{\alpha_s};\quad(11,4,7)$$

$$\exp\left(\gamma x^2+\int_{-b}^{a}(e^{xu}-1-xu)\,dG(u)+u(x, 0)\right)=$$
$$=(f_1(x))^{\alpha_1+1}\dots(f_s(x))^{\alpha_s}.$$

Введем теперь вспомогательную нормальную переменную Z, полагая

$$\exp(1+\alpha_1+\dots+\alpha_s)x^2=(E(\exp xZ))^{1+\alpha_1+\dots\alpha_s},\quad(11,4,8)$$

и будем считать Y_j случайными величинами — такими, что $Z, Y_1, \dots, Y_s$ независимы в совокупности, и $f_j(x)=E\exp xY_j$ $(j=1, 2, \dots, s)$.

Умножая равенства (11,4,7) на (11,4,8), получим

$$\exp\Bigg[(\gamma+1+\alpha_1+\dots+\alpha_s)x^2+$$
$$+\int_{-b}^{a}(e^{xu}-1-xu)\,dG(u)-u(x, 0)\Bigg]=$$
$$=(E\exp xZ)^{\alpha_1+1}\prod_{j=2}^{s}(E\exp x(Z+Y_j))^{\alpha_j};\quad(11,4,9)$$

$$\exp\left[(\gamma + 1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_s) x^2 + \right.$$

$$\left. + \int_{-b}^{a} (e^{xu} - 1 - xu)\, dG(u) + u(x, 0)\right] =$$

$$= (E \exp xZ)^{\alpha_1 + 1} \prod_{j=2}^{s} (E \exp x(Z + Y_j))^{\alpha_j}. \qquad (11,4,10)$$

Очевидно, существуют две пары положительных чисел a_m, b_n $(m,\ n = 1,\ 2)$ — таких, что

$$E \exp x(Z + Y_j) > a_1 \exp(b_1 x) \quad (x \geqslant 0); \quad j = 2, \ldots, s;$$

$$E \exp x(Z + Y_j) > a_2 \exp(-b_2 x) \quad (x < 0); \quad j = 2, \ldots, s.$$

Такие же неравенства верны для $E \exp xZ = \exp x^2$. Отсюда находим оценку для $u(x,\ 0)$, рассуждая, как в § 1 гл. 9 при выводе (9,1,14). Дальнейшие рассуждения идентичны с рассуждениями гл. 9. Мы приходим к выводу, что $f_1(z)$ отвечает б. д. з. с пуассоновым спектром, входящим в S. Передавая роль $f_1(z)$ любой из $f_j(z)$, приходим к полному доказательству теоремы 11.4.1.

Разумеется, теорема 9.0.1 и теорема 6.4.1, которая была нами доказана более просто отдельно в гл. 6, ввиду ее интересных следствий, непосредственно следуют из теоремы 11.4.1.

Глава двенадцатая

БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ ЗАКОНЫ БЕЗ ГАУССОВОЙ КОМПОНЕНТЫ. РЕЗУЛЬТАТЫ Г. КРАМЕРА, П. ЛЕВИ И Д. А. РАЙКОВА

В гл. 8 было доказано, что для того, чтобы б. д. з., имеющий гауссову компоненту, принадлежал I_0, т. е. имел бы только б. д. компоненты, необходимо, чтобы его спектр был конечным или счетным, и пуассоновы частоты имели бы вид (8,1,7) и (8,1,8). Однако если гауссова компонента отсутствует, то указанные условия не являются необходимыми.

Для случая отсутствия гауссовой компоненты в этом направлении имеется ряд интересных результатов. Один частный случай б. д. з., имеющих континуальный спектр, был разобран Г. Крамером в 1949 г. [54].

§ 1. ТЕОРЕМА Г. КРАМЕРА О БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНАХ С КОНТИНУАЛЬНЫМ СПЕКТРОМ

Обратимся к формуле Леви—Хинчина для логарифма х. ф. б. д. з. (формула 0,2,8)

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int\limits_{-\infty}^{0} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dM(u) + \int\limits_{0}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dN(u) \qquad (12,1,1)$$

с обычными условиями для $M(u)$ и $N(u)$, $\gamma \geqslant 0$.

Монотонные функции $M(u)$ и $N(u)$ имеют почти везде конечные производные $M'(u) \geqslant 0$ и $N'(u) \geqslant 0$.

Теорема 12.1.1 (Г. Крамер)

Пусть существуют константы $k > 0$, $c > 0$ — такие, что $N'(u) > k$ почти везде на интервале $(0, c)$. Тогда соответствующий безгранично делимый закон $F \overline{\in} I_0$ (т. е. F имеет *не безгранично делимые компоненты). Такое же утверждение верно, если $M'(u) > k$ почти везде на $(-c, 0)$.*

Не ограничивая общности (замена t на $(-t)$ в нужном случае), считаем $N'(u) > k$ почти везде в $(0, c)$. Рассмотрим б. д. з. G с логарифмом х. ф.

$$\ln g(t) = k\int_0^c \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) du. \qquad (12,1,2)$$

Заметим, что G есть компонента F, именно

$$F = G * G_1, \qquad (12,1,3)$$

где G_1 — б. д. з. Чтобы убедиться в этом, заметим, что монотонная функция $N(u)$ может быть представлена в виде (см. § 2 введения)

$$N(u) = N_{\mathrm{I}}(u) + N_{\mathrm{II}}(u) + N_{\mathrm{III}}(u),$$

где $N_{\mathrm{I}}(u)$ — абсолютно непрерывная монотонная функция; $N_{\mathrm{II}}(u)$ — непрерывная, но не абсолютно непрерывная монотонная функция, с производной почти везде равной 0, и $N_{\mathrm{III}}(u)$ — „функция скачков". Так как на интервале $(0, c)$ $N'(u) > k$ почти везде, то $N'_{\mathrm{I}}(u) > k$ почти везде, и $N_{\mathrm{I}}(u) - ku$ неубывающая функция на интервале $(0, c)$. Полагая

$$\ln g_1(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dM(u) +$$

$$+ \int_0^c \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) d(N_{\mathrm{I}}(u) - ku) +$$

$$+ \int_0^c \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dN_{\mathrm{II}}(u) + \int_0^c \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dN_{\mathrm{III}}(u) +$$

$$+ \int_c^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dN(u), \qquad (12,1,4)$$

видим, что $g_1(t)$ — х. ф. б. д. з. и G_1 — компонента F, соответственно (12,1,3).

Достаточно показать теперь, что G имеет не б. д. компоненты.

Введем кусочно постоянные функции $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$, $x \in [0, c]$ следующим образом: пусть $\varepsilon > 0$ — малое число, $\varepsilon < \frac{1}{2}$ $\rho_1(x) = 1$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{c}{4} - c\varepsilon$; $\rho_1(x) = -\varepsilon$ при $\left(\frac{c}{4} - c\varepsilon < x < \frac{3c}{4} + c\varepsilon\right)$; $\rho_2(x) = 1$ при $\frac{3c}{4} + c\varepsilon \leqslant x \leqslant c$, $\rho_2(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant$

$\leqslant \frac{c}{4} - c\varepsilon$; $\rho_2(x) = (1+\varepsilon)$ при $\left(\frac{c}{4} - c\varepsilon < x < \frac{3c}{4} + c\varepsilon\right)$; $\rho_2(x) = 0$ при $\left(\frac{3c}{4} + c\varepsilon \leqslant x \leqslant c\right)$. Составим выражение

$$\ln \psi_j(t) = k\int_0^c \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\rho_j(u)\,du,\ j = 1,\ 2. \qquad (12,1,5)$$

Ясно, что $\psi_2(u)$ есть х. ф. б. д. з., далее,

$$g(t) = \psi_1(t)\,\psi_2(t). \qquad (12,1,6)$$

Если $\psi_1(t)$ есть х. ф., то она есть х. ф. не б. д. з. Таким образом, достаточно доказать, что при подходящем выборе ε $\psi_1(t)$ есть х. ф. Перейдем к соответствующему доказательству. Для каждого реального x, определим $\beta_i(x)$ следующим образом:

$$\beta_1(x) = k\alpha_1(x);\ \beta_2(x) = \int_0^x \beta_1(x-v)\,\beta_1(v)\,dv, \ldots,\ \beta_n(x) = \\ = \int_0^x \beta_{n-1}(x-v)\,\beta_1(v)\,dv.$$

Тогда имеем $\beta_n(x) = 0$ всюду вне сегмента $[0,\ nc]$, в силу теоремы о свертке преобразований Фурье (см. 1.3.6), имеем:

$$\int_0^{nc} e^{itx}\,\beta_n(x)\,dx = k^n\left(\int_0^c e^{itx}\,\rho_1(x)\right)^n. \qquad (12,1,7)$$

Далее, $|\beta_n(x)| \leqslant k^n c^{n-1}$ для любого значения x, как следует из определения функций $\beta_n(x)$. Отсюда выводим

$$\int_0^\infty e^{itx}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{\beta_n(x)}{n!}\right)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}\int_0^{nc} e^{itx}\,\beta_n(x)\,dx = \\ = \exp\left(k\int_0^c e^{itx}\,\rho_1(x)\,dx\right) - 1. \qquad (12,1,8)$$

Теперь обратимся к формуле (12,1,4) (при $j = 1$). Положим в ней

$$\varkappa = k\int_0^c \rho_1(x)\,dx,\quad \lambda = k\int_0^c \frac{u}{1-u^2}\,du.$$

Тогда получим [см. (12,1,7)]

$$\psi_1(t) = e^{-\varkappa-\lambda it}\left(1 + \int_0^\infty e^{itx}\sum_1^\infty \frac{\beta_n(x)}{n!}\,dx\right) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx}\,dG_1(x), \quad (12,1,9)$$

где

$$G_1(x) = e^{-x}\left[\epsilon(x+\lambda) + \int_{-\infty}^{x} \frac{\beta_n(y+\lambda)}{n!}\,dy\right]. \qquad (12,1,10)$$

Здесь $G_1(-\infty) = 0$, $G_1(\infty) = \psi_1(0) = 1$ [см. (12,1,9)].

Надо доказать, что $G_1(x)$ — з. р., для чего достаточно обнаружить, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n(x)}{n!} \geqslant 0$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим сперва $\beta_1(x)$. Имеем $\beta_1(x) \geqslant 0$ при

$$x \overline{\in} \left(c\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right), c\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\right).$$

В указанном интервале, $\beta_1(x) = -k\varepsilon$. Прямым подсчетом $\beta_2(x)$, убеждаемся, что при $\varepsilon \to 0$, $\beta_2(x) \to k^2(c - |c - x|)$ равномерно в любом сегменте, входящем в $(0,2c)$, и что $\beta_2(x) \geqslant 0$ для всех x; также прямой подсчет, который мы здесь опускаем, показывает, что $\beta_3(x) \geqslant 0$ при достаточно малом ε. Отсюда следует, что $\beta_j(x) \geqslant 0$ при $j \geqslant 4$. Это верно для $\beta_4(x) = \int_0^x \beta_2(x-v)\beta_2(v)\,dv$ и если это верно для $\beta_j(x)\,(j \geqslant 4)$, то это верно и для $\beta_{j+1}(x) = \int_0^{x^\bullet} \beta_{j-1}(x)\beta_2(x)\,dx$. Отсюда находим, что

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{\beta_n(x)}{n!} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n(x)}{n!} \geqslant 0. \qquad (12,1,11)$$

Таким образом, $G_1(x)$ — з. р. и $\psi_j(t)$ — х. ф., что и доказывает теорему 12.1.1. Из теоремы 5.4.2 следует, что F имеет неразложимые компоненты.

Заметим, что для случая $\gamma > 0$ в (12,1,1) (наличие гауссовой компоненты), эта теорема следует из теоремы 8.1.1, и, таким образом, мы имеем новую информацию для случая $\gamma = 0$.

Этот случай весьма существен, так как к нему принадлежит ряд важных классов з. р.

Для устойчивых законов (см. [6, 44]) с показателем $0 < \alpha < 2$ имеем представление по формуле Леви—Хинчина (см. [44], стр. 97): $\gamma = 0$ и

$$\ln \varphi(t) = i\beta t + c_1 \int_0^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) \frac{du}{u^{1+\alpha}} +$$

$$+ c_2 \int_{-\infty}^{0} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) \frac{du}{|u|^{1+\alpha}};\ c_1 \geqslant 0,\ c_2 \geqslant 0. \qquad (12,1,12)$$

Здесь $N'(u) = \frac{1}{u^{1+\alpha}} \geqslant 1$ в интервале (0, 1) (или так ведет себя $M(u)$), и условия теоремы 12.1.1 выполняются. Стало быть, все устойчивые законы, кроме нормальных законов, не принадлежат I_0, т. е. имеют неразложимые компоненты.

Для законов К. Пирсона III типа имеем представление формулой с $\gamma = 0$, $M(u) = 0$, $N'(u) = \frac{\lambda}{u} e^{-\alpha u}$ $(u > 0)$; $\lambda > 0$, $\alpha > 0$. Здесь $N'(u) > \lambda e^{-\alpha}$ $(0 < u < 1)$, следовательно, по теореме 12.1.1 эти з. р. имеют неразложимые компоненты.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ П. ЛЕВИ

П. Леви [65, 66] и Д. А. Райков [31] изучали разложение некоторых случайных величин, распределение которых сосредоточено на счетном множестве чисел вида

$$h_1\tau_1 + h_2\tau_2 + \ldots + h_n\tau_n, \tag{12,2,1}$$

где $h_1, \ldots, h_n$ пробегают произвольные целые числа (т. е. на числовом модуле, построенном на числах $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$). Мы изложим здесь лишь некоторые из глубоких результатов П. Леви — результаты, относящиеся к экспонентной функции от полинома.

При этом придется ограничиться лишь формулировкой результатов без доказательств.

Пусть X — случайная величина, распределенная по закону Пуассона вида $P(X = m\tau) = e^{-a} \frac{a^m}{m!}$; $a > 0$; $\tau > 0$ — целое число; $m = 0, 1, 2, \ldots$ Рассмотрим производящую функцию (см. § 1, гл. 5)

$$E(z^X) = \exp(az^\tau - a). \tag{12,2,2}$$

Если независимым случайным величинам $X_1, X_2, \ldots, X_p$ отвечают производящие функции вида (12,2,2) с соответствующими различными $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$, $a_i > 0$, то сумме $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_p$ отвечает производящая функция

$$\begin{aligned} \exp(a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_pz^p - (a_1 + \ldots + a_p)) = \\ = \exp(P(z) - A_p), \end{aligned} \tag{12,2,3}$$

где $P(z) = a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_pz^p$, $A_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p$. Функция (12,2,3) будет отвечать б. д. з. П. Леви [65], изучает более общий случай, когда некоторые из коэффициентов $P(z)$ могут быть отрицательными. Тогда исследуется вопрос о том, при каких условиях, налагаемых на коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_p$, (12,2,3) является производящей функцией для целочисленной случайной величины Y. Такой вопрос непосредственно сводится к задаче о том, при каких условиях в разложении

$$\exp P(z) = \int_{n=0}^{\infty} \Lambda_n z^n \qquad (12,2,4)$$

коэффициенты $\Lambda_n \geqslant 0$.

Подобные результаты позволяют исследовать условия, когда композиции законов Пуассона (12,2,3) могут иметь неразложимые компоненты. Заметим, что a_p, которое предполагается неравным 0, должно быть положительным, если $\Lambda_n \geqslant 0$. В самом деле, при $z = x \to \infty$ мы должны иметь $\exp P(z) \to \infty$.

Обозначим $P_m(z)$ — сумму членов $P(z)$, степени которых не превосходят m; $\overline{P(z)}$ и $\overline{P_m}(z)$ — сумму членов с положительными коэффициентами, имеющихся в полиномах $P(z)$ и $P_m(z)$; δ и δ_m — общие наибольшие делители степеней ненулевых членов $P(z)$ и $P(z) - P_m(z)$ $(m < p)$.

П. Леви [65] вводит два условия.

Условие A. *Для всякого целого m, такого, что $a_m < 0$ (стало быть, $m < p$), δ_m делит m.*

Заметим, что условие A определяется только знаками членов $P(z)$, а не величиной коэффициентов при ненулевых членах.

Условие B. *Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ — степени ненулевых членов $P_n(z)$ и E_n — множество чисел вида $h_1p_1 + h_2p_2 + \ldots + h_\nu p_\nu$, где $h_i \geqslant 0$ — целые числа $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$. Число m должно принадлежать множеству E_{m-1}.*

Это условие также зависит лишь от знаков коэффициентов $P(z)$.

Теорема 12.2.1 (П. Леви)

Для того, чтобы в (12,2,4) все Λ_n были неотрицательны, необходимо выполнение условий A и B. Если они выполнены и если зафиксировать члены с положительными и нулевыми коэффициентами, а коэффициенты членов с отрицательными коэффициентами (членов $P(z) - \overline{P(z)}$) сделать достаточно малыми, то условия A и B станут достаточными, чтобы $\Lambda_n \geqslant 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Теорема 12.2.1 позволяет найти условие, чтобы композиция законов Пуассона, описанного выше вида, не принадлежала I_0. Пусть $P(z)$ в 12.2.3 имеет только неотрицательные коэффициенты, и $a_p > 0$.

Теорема 12.2.2 (П. Леви)

Для того, чтобы случайная величина, являющаяся композицией законов Пуассона с производящей функцией вида (12,2,3), имела неразложимые компоненты, необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно $m < p$ — такое, что полином $P(z) - (a_m + c)x^m$ при $c > 0$ удовлетворял бы условиям A и B.

С помощью этой теоремы можно построить различные примеры композиций законов Пуассона, имеющих неразложимые компоненты. Так строится пример П. Леви в § 2 гл. 6, показывающий, что композиция трех законов Пуассона может не принадлежать к I_0. Напротив, композиция двух законов Пуассона с х. ф. вида

$$\varphi(t) = \exp(\lambda_1 (e^{i\alpha_1 t} - 1) + \lambda_2 (e^{i\alpha_2 t} - 1)); \quad \lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \alpha_2 > \alpha_1 > 0$$

всегда принадлежит к I_0.

Это утверждение можно вывести из теоремы П. Леви 12.2.2 для случая рационального $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ и из теоремы Д. А. Райкова 12.3.2, излагаемой в следующем параграфе. Оно, однако, легко следует из теоремы 9.11.1: спектр нашей композиции можно считать рациональным правее и левее точки 0, и формула (9,11,2) сразу дает требуемое.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ Д. А. РАЙКОВА

Изложим теперь некоторые результаты Д. А. Райкова о композициях законов Пуассона [31]. Эти результаты требуют довольно глубокого использования теории почти периодических функций; мы изложим их здесь без доказательства.

Пусть $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k$ — набор произвольных положительных чисел; $\Lambda(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ — совокупность всех чисел вида

$$l_1\tau_1 + l_2\tau_2 + \ldots + l_k\tau_k; \quad l_j \geqslant 0; \quad l_1 + \ldots + l_k > 0, \qquad (12,3,1)$$

где l_j — целые числа. Разумеется, все числа вида (12,3,1) положительны. Они не имеют предельных точек на конечном расстоянии, ибо при возрастании хотя бы одного из l_j, числа (12,3,1) увеличиваются. Следовательно, числа совокупности $\Lambda(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ можно расположить в возрастающую последовательность (не учитывая возможных повторений)

$$\Lambda_1 = \tau_1 < \Lambda_2 < \ldots < \Lambda_n < \ldots \qquad (12,3,2)$$

Рассмотрим теперь композицию законов Пуассона, отвечающую х. ф.

$$\varphi(t) = \exp\left(\sum_{a=1}^{k} \lambda_a (e^{i\tau_a t} - 1)\right). \qquad (12,3,3)$$

Теорема 12.3.1 (Д. А. Райков)

Все компоненты композиции законов Пуассона вида (12,3,3) *имеют вид*

$$\exp\left(i\beta t + \sum_{\Lambda_n < \delta_k} \alpha_{\Lambda_n} (e^{i\Lambda_n t} - 1)\right). \qquad (12,3,4)$$

этой теореме примыкают вторая и третья теоремы Д. А. 'айкова.

Теорема 12.3.2

Если положительные числа $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *линейно независимы в поле рациональных чисел, то композиция законов Пуассона с х. ф.* (12,3,3) *принадлежит к* I_0 *и, следовательно, имеет компоненты только того же вида* (12,3,3) (*с точностью до сдвига*).

Теорема 12.3.3

Если положительные числа $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *подчинены условию*

$$\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n \leqslant 2\tau_1, \qquad (12,3,5)$$

то композиция законов Пуассона с х. ф. (12,3,3) *принадлежит к* I_0 *и, следовательно, имеет компоненты только того же вида* (12,3,3) (*с точностью до сдвига*).

Теоремы 12.3.2 и 12.3.3 особенно отчетливо показывают различие между случаями, когда у б. д. з. присутствует или отсутствует гауссова компонента; между ними и теоремой 8.1.1 виден резкий контраст.

Глава тринадцатая

ДОПОЛНЕНИЯ

В этой главе мы изложим одну теорему о хребтовых функциях, а также укажем некоторые нерешенные проблемы и относящиеся к ним гипотезы.

§ 1. ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НЕКОТОРЫХ ХРЕБТОВЫХ ФУНКЦИЙ

В § 2 гл. 3 рассматривались хребтовые в некогорой полосе функции. Мы видели, что всякая х. ф., регулярная в этой полосе, — хребтовая; обратное вообще неверно (см. § 2, гл. 3).

Если хребтовая функция имеет преобразование Фурье вдоль какой-либо прямой в полосе ее задания, это преобразование не обязано давать неотрицательную функцию. Можно, однако, указать некоторые случаи, когда такое преобразование дает неотрицательную функцию, если в качестве контура взять не прямую, а криволинейный контур перевала (по поводу метода перевала см. § 7 гл. 1).

Теорема 13.1.1 (Ю. В. Линник)

Пусть $\varphi(z) = \exp g(z)$ — *целая четная функция без нулей, порядка выше первого, реальная на реальной оси и являющаяся хребтовой*

$$|\varphi(z)| \leqslant \varphi(x).$$

Тогда при любом $\alpha > 0$

$$f_\alpha(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha\, dz > 0, \tag{13,1,1}$$

если этот интеграл сходится.

Здесь L — „контур перевала“, поясняемый далее. Мы изложим вкратце доказательство этой теоремы и возникающие здесь вопросы.

При всяком реальном ξ, $e^{z\xi}$, а стало быть, и $e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha$ будет целой хребтовой функцией без нулей.

Далее, на реальной оси должна существовать хотя бы одна точка перевала $\xi_0(\alpha, \xi)$. Достаточно доказать, что $e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha$ достигает минимума при реальных $z = x$ (когда она по условию реальна). Для этого заметим, что при $z = x \to \infty$, $e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha$ должна неограниченно возрастать. Будь это не так, имели бы $|\varphi(z)| = O\left(\exp\frac{\xi}{\alpha}|x|\right)$ при $x > 0$, по четности $\varphi(z)$, это не было бы верным при $z = x < 0$, но тогда, так как реальная ось есть „хребет" $\varphi(z)$, имели бы вообще $\varphi(z) = O\left(\exp\frac{\xi}{\alpha}|x|\right)$, что допущено невозможным. Таким образом, точки перевала на реальной оси найдутся. Берем ту из них, где $|e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha|$ минимально на всей реальной оси (любую, если их несколько).

Уходим из нее в верхнюю полуплоскость по линии наискорейшего спуска (что возможно по „свойству хребта" реальной оси) и двигаемся далее по (какой-либо) линии наискорейшего спуска. Полученный контур (кусочно аналитический) назовем L_1. Он весь будет проходить в верхней полуплоскости, ибо не может пересекать реальную ось. В самом деле, на L_1 $|e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha|$ убывает, и, так как в начале L_1 при $z = \xi_0(\alpha, \xi)$ получается минимум $|e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha|$ на всей реальной оси, то далее мы не можем ее достигнуть. Далее на контуре L_1 $I(e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha) = 0$, ибо мнимая часть $e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha$ должна быть постоянной на линии наискорейшего спуска, а в начале L_1 она равна 0. Отсюда

$$R\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{L_1} e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha\,dy.$$

В начале контура L_1 $dy > 0$, ибо он уходит в верхнюю полуплоскость. Далее, он не пересекает реальной оси, и на нем реальное число $e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha = |e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha|$ не возрастает. Разбивая наш контур L_1 на части, где $dy \geqslant 0$ и $dy < 0$, легко обнаруживается, что сумма интегралов по его частям с $dy > 0$ больше суммы интегралов по его частям, где $dy < 0$, так что

$$R\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha dz > 0. \tag{13,1,2}$$

Далее, присоединим к L_1 его зеркальное изображение в реальной оси L_2. Тогда, пробегая L_2 из ∞ к реальной оси, получим

$$\int_{L_2} e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha dz = -\overline{\int_{L_1} e^{-z\xi}(\varphi(z))^\alpha\,dz}.$$

Отсюда

$$R\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} e^{-z\xi}(\varphi(z))^{\alpha}dz = R\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} e^{-z\xi}(\varphi(z))^{\alpha}dz > 0. \qquad (13,1,3)$$

Беря в качестве L контур L_2+L_1, пробегаемый от ∞ через реальную ось к ∞, из (13,1,2) и (13,1,3) получим (13,1,1).

§ 2. НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ГИПОТЕЗЫ

Отметим прежде всего несколько нерешенных задач, касающихся характеристических функций и характеристических функционалов, связанных с теорией разложения з. р.

Теорема Марцинкевича 3.3.1 отчасти поясняет, почему существует „разрыв“ между х. ф. нормального закона $\exp\left(-\frac{\sigma^2t^2}{2}+i\beta t\right)$ и х. ф. закона Пуассона $\exp(\lambda(e^{iat}-1))$. Здесь в экспоненте стоит квадратный полином и целая функция экспонентного типа a. На основании теоремы 3.3.1 мы приходим к выводу о том, что в экспоненте не может стоять иной полином, кроме квадратного. Это приводит к следующей задаче.

1°. *Пусть $g(t)$ — целая функция экспонентного типа* 0, *не равная квадратному полиному. Может ли* $\exp g(t)$ *быть характеристической функцией?*

Рассмотрение доказательства теоремы 4.1.1 показывает, что ее можно перенести на х. ф. случайных векторов X, заданных в n-мерном Евклидовом пространстве E_n, $\varphi(t_1, \ldots, t_n) = E\exp i(t, X)$, где $t=(t_1, \ldots, t_n)$; $X=(X_1, \ldots, X_n)$ и в скобках стоит скалярное произведение. Если $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ голоморфна в области $|t_1|<\delta$, $|t_n|<\delta$ $(\delta>0)$, то это же верно для х. ф. любой компоненты случайного вектора X. Можно поставить вопрос о том, будет ли это верно для аналитических характеристических функционалов.

2°. *Пусть случайная величина X принимает значения из пространства Банаха B (см. определение у Р. Фортэ* [62]), *и ее характеристический функционал, заданный на дуальном пространстве B^*, является аналитическим в некоторой области $D\subset B^*$, охватывающей нулевое значение* (*см. определение у Э. Хилле* [41], *гл.* 4). *При каких условиях все компоненты X будут иметь характеристические функционалы, аналитические в той же области?*

Проблемы, касающиеся разложений и „α-разложений“ нормального закона, разбираемые в § 2 гл. 4 и в § 1 гл. 11, также приводят к ряду нерешенных вопросов. Укажем некоторые из них.

3°. *Пусть $f_j(t)$ $(j=1, 2, \ldots)$ — х. ф. и пусть для последовательности реальных чисел $t_k \to 0$ имеем соотношение*

$$\prod_{j=1}^{\infty}(f_j(t_k))^{\alpha_j}=\exp Q(t_k), \qquad (13,2,1)$$

где $\alpha_j>0$, а $Q(t)$ — *квадратный полином. При каких условиях отсюда следует, что все* $f_j(t)$ *суть х. ф. нормального закона?* Решение этой задачи позволило бы обобщить теорему В. П. Скитовича — Г. Дармуа [34] на случай линейных форм от независимых величин со счетным множеством слагаемых:

$$L_1=a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n+\ldots$$
$$L_2=b_1X_1+b_2X_2+\ldots+b_nX_n+\ldots$$

Можно рассмотреть и аналог (13,2,1) следующего вида: пусть при каждом $j\in[a, b]$ задана х. ф. $f_j(t)=f(t, j)$ и задана неубывающая функция $F(j)$.

4°. *Пусть для последовательности реальных чисел* $t_k\to 0$ *имеем соотношение*

$$\exp\int_a^b \ln f(t_k, j)\,dF(j)=\exp Q(t_k), \qquad (13,2,2)$$

где $Q(t)$ — *квадратный полином. Что можно сказать о поведении* $f(t, j)$?

Аналогичные задачи возникают и для случайных векторов. Пусть $\varphi_j(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — х. ф. случайных векторов в E_n и пусть для последовательности точек $\{(t_{1k}, t_{2k}, \ldots, t_{nk})\}$ имеем:

$$\prod_{j=1}^{s}(\varphi_j(t_{1k}, t_{2k}, \ldots, t_{nk}))^{\alpha_j}=\exp Q(t_{1k}, t_{2k}, \ldots, t_{nk}). \qquad (13,2,3)$$

5°. *Какие условия нужно наложить на последовательность точек* $(t_{1k}, t_{2k}, \ldots, t_{nk})$ *для того, чтобы из* (13,2,3) *следовало, что* $\varphi_j(t_1 \ldots, t_n)$ — *х. ф. нормального вектора?*

6°. *Если справа в* (13,2,3) *вместо* $Q(t_1, \ldots t_n)$ *стоит функция* $\varphi(t_{1k}, \ldots, t_{nk})$, *голоморфная в области* $|t_1|<\delta, \ldots, t_n|<\delta$ *и обладающая свойством эрмитовости, то при каких условиях, налагаемых на точки* $(t_{1k}, \ldots, t_{nk})$, *х. ф.* $\varphi_j(t_1, \ldots, t_n)$ *будут голоморфны в той же области?*.

7°. *Можно ли построить в каком-либо смысле экстремальные оценки* δ_j *в теореме* 11.1.1. *Н. А. Сапогова? Насколько они далеки от оценок Н. А. Сапогова?*

Отметим ряд нерешенных задач, касающихся б. д. з. гауссовой компонентой. Теорема 8.1.1 дает нам необходимые условия принадлежности такого закона к I_0, теорема же 10.0.1 указывает достаточные условия. Это приводит к проблеме 8°.

8°. *Будут ли необходимые условия теоремы* 8.1.1 *принадлежности б. д. з. к* I_0, *при наличии гауссовой компоненты, также и достаточными. Иначе говоря, если б. д. з. имеет счетный пуассонов спектр вида* (9,15,4) *и* (9,15,5), *то будет* *ли он иметь только б. д. компоненты? (Наличие гауссовой компоненты несущественно.)*

Здесь можно высказать гипотезу.

Гипотеза: если в обозначениях теоремы 10.0.1 имеем:

$$\lambda_n = O(\exp - k\mu_n^2); \quad \lambda_{-n} = O(\exp - k\nu_n^2) \qquad (13,2,4)$$

при любом $k > 1$, то соответствующий б. д. з. (который может и не иметь гауссовой компоненты) имеет только б. д. компоненты. Средством к доказательству такой гипотезы может служить работа Б. Я. Левина [13].

Рассмотрение имеющихся теорем о б. д. з. без гауссовой компоненты (гл. 11) приводит к гипотезе.

Гипотеза. Если б. д. з. имеет континуальный спектр, то он имеет неразложимые компоненты.

Эта гипотеза была доказана в гл. 8 для случая закона с гауссовой компонентой; она верна в случае, когда в спектре есть абсолютно непрерывная часть под одним условием (теорема 12.1.1 Г. Крамера). Общий случай остается невыясненным.

9°. *Построение аналогов изложенных в гл.* 8—12 *теорем для случая n-мерных случайных векторов. До сих пор такие аналоги существуют лишь для вопросов, связанных с разложением нормального случайного вектора.* По поводу определений б. д. з. для случайных векторов см. П. Леви [64].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., ГТТИ, 1947.

2. Валле Пуссен, Ш. Ж. де ла. Курс анализа бесконечно малых, I. М., ГТТИ, 1933.

3. Виноградов И. М. Избранные труды. М., Изд. АН СССР, 1952.

4. Гнеденко Б. В. О характеристических функциях. Бюлл. МГУ. I, 5, 17—18, 937.

5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей, 2-е изд. М., ГТТИ, 1954.

6. Гнеденко Б. В. и А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М., ГТТИ, 1949.

7. Гурвиц А. Теории аналитических и эллиптических функций. М., ГТТИ, 1933.

8. Зингер А. А. Независимость квазиполиномиальных статистик и аналитические свойства распределений. „Теория вероятностей и ее применения", III, 3, 265—284, 1958.

9. Крамер Г. Случайные величины и распределения вероятностей. М., ГТТИ, 1947.

10. Красносельский М. А., Я. Б. Рутицкий. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., ГФМИ, 1958.

11. Курант Р. Геометрическая теория функций комплексной переменной. М., ОНТИ, 1934.

12. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956.

13. Левин Б. Я. Об одной теории единственности в гармоническом анализе. Вестник ЛГУ, № 13, 59—62, 1959.

14. Линник Ю. В. Замечания по поводу классического вывода закона Максвелла. ДАН СССР, разд. „Физика", 87, № 6, 1952.

15. Линник Ю. В. Линейные формы и статистические критерии. I Украинский математический журнал, 5, № 2, 207—243, 1953.

16. Линник Ю. В. Линейные формы и статистические критерии. II Украинский математический журнал, 5, № 3, 247—290, 1953.

17. Линник Ю. В. Одна задача о характеристических функциях вероятностных распределений. УМН, 10, 1(63), 137—138, 1955.

18. Линник Ю. В. Замечание к теореме Г. Крамера о разложении ормального закона. „Теория вероятностей и ее применения", 1, 4, 466—478, 56.

19. Линник Ю. В. О разложении композиции законов Гаусса и Пуас-на. „Теория вероятностей и ее применения", I, 1, 34—59, 1957.

20. Линник Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов, I. „Теория вероятностей и ее применения“, 3, 1, 3—40, 1958.

21. Линник Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. II. „Теория вероятностей и ее применения“, 4, 1, 55—85, 1959.

22. Линник Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. III. „Теория вероятностей и ее применения“, 4, 2, 150—171, 1959.

23. Линник Ю. В. Об „α-разложениях“ безгранично делимых вероятностных законов. Вестник ЛГУ, № 1, 14—23, 1959.

24. Линник Ю. В., А. А. Зингер. Об одном аналитическом обобщении теоремы Г. Крамера. Вестник ЛГУ, № 11, 51—56, 1955.

25. Линник Ю. В., В. П. Скитович. Еще об обобщениях теоремы Г. Крамера. Вестник ЛГУ, № 1, 39—44, 1958.

26. Натансон И. П Теория функций вещественной переменной. М., ГТТИ, 1957.

27. Паренаго П. П. Курс звездной астрономии. М., ГТТИ, 1946.

28. Райков Д. А. О разложении закона Пуассона. ДАН СССР, 14, 9—12, 1937.

29. Райков Д. А. Об одном свойстве полиномов деления круга. Матем. сб., 2 (44) 379—382, 1937.

30. Райков Д. А. Одна теорема из теории аналитических характеристических функций. Изв. НИИ матем.-мех. ф-та Томского ун-та, 2, 2, 8—11, 1938.

31. Райков Д. А. О разложении законов Гаусса и Пуассона. ИАН СССР, серия матем. 2, 91—124, 1938.

32. Сапогов Н. А. Проблема устойчивости для теоремы Крамера. ИАН СССР, серия матем. 15, № 3, 205—218, 1951.

33. Сапогов Н. А. О независимых слагаемых сумм случайных величин, распределенных приближенно нормально. Вестник ЛГУ, № 19, 78—105, 1959.

34. Скитович В П. Об одном свойстве нормального распределения. ДАН СССР, 89, 217—219, 1953.

35. Скитович В. П. Линейные формы от независимых случайных величин и нормальный закон распределения. ИАН СССР, серия матем. 18, 185—200, 1954.

36. Тичмарш Е. С. Введение в теорию интегралов Фурье. М., ГТТИ, 1948.

37. Тичмарш Е. С. Теория функций. М., ГТТИ, 1951.

38. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, III, М., ГТТИ, 1949.

39. Френкель Я. И. Статистическая физика. М., ГТТИ, 1948.

40 Чебышев П. Л. Собрание сочинений, II. М., Изд. АН СССР, 1947.

41. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы. М., ГТТИ, 1952.

42. Хинчин А. Я. Об одном признаке для характеристических функций. Бюлл. МГУ, А, 1, 5, 1—3, 1937.

43. Хинчин А. Я. Об арифметике законов распределения. Бюлл. МГУ, А, 1, 1, 6—17, 1937.

44. Хинчин А. Я. Предельные законы для сумм независимых случайных величин. М., ОНТИ, 1938.

45. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М., ГТТИ, 1948.

46. Шалаевский О. В. Об устойчивости для теоремы Д. А. Райкова. Вестник ЛГУ, № 7, 41—49, 1959.

47. Basu D., Laha R. On some characterization of the normal distribution. Sankhya 13, 4 (1954), Addenda, Sankhya, 14, 1—2, 1954.

48. Boas R. P. Entire functions. N. J., 1954.

49. Bochner S. Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Leipzig, 1932.

50. De Bruijn. Asymptotic methods in analysis. North Holland publ. Co. Amsterdam, 1958.

51. Cramér H. Uber eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. Math. Zs, 41, 405—414, 1936.

52 C r a m é r H. On the representation of a function by certain Fourier integrals. Trans. Amer. math. soc, 191—201, 1939.
53. C r a m è r H. Problems in probability theory. Ann. math. stat., **18**, No 2, 165—193, 1947.
54. C r a m è r H. On the factorization of certain probability distributions. Ark. för mat.., **I**, No 7, 61—65, 1949.
55. D a r m o i s G. Analyse générale des liaisons stochastiques. Rev. Inst. Intern. Stat., **21**, 2—8, 1953.
56. D u g u é D. Analyticitè et convexité des fonctions caractéristiques. Ann. Inst. H. Poincaré, **12**. 45—36, 1951.
57. D u g u é D. Sur certains exemples de décomposition en arithmétique des lois des probabilités. Ann. Inst. H. Poincaré, **12**, 159—171, 1951.
58. D u g u é D. Sur l'approximation d'une fonction caracteristique par sa série de Fourier. C. r. Acad. Sci., Paris. **240**, 151—153, 1955.
59. D u g u é D. Resultats sur les fonctions adsolment monotones of applications à l'arythmétique des fonctions du type positif. C. R. Acad. Sci., Paris, **244**, 715—717, 1957.
60. D u g u é D. Arithmétique des lois des probabilités. Paris, 1957.
61. D u g u é D, F i s h e r R. A. Un résultat assez inattendu d'arithmétique des lois des probabilités C. r. Acad. sci., **227**, 1205—1207. 1948.
62. F o r t e t R. Normalverteilte Zufallselemente in Banachschen Räumen. Bericht über die Tagung üder Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, 29—35, 1957.
63. L a h a R. On a factorization theorem in the theory of analytic characteristic functions. Ann. math. stat., Vol **29**, 922—925, 1958.
64. L é v y P. Theorie de l'addition des variables aléatoires. Paris, 937 (есть 2-е издание, 1954.)
65. L è v y P. Sur les exponentielles des polynomes et sur l'arithmétique des produts des lois de Poisson, Ann. ec. norm. sup, **54**, 231—202, 1937.
66. L è v y P. L'arithmétique des lois des probabilités. J. math., **103**, 17—40, 1938.
67. L i a p o u n o f f A. Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. Записки Императорской академии наук, серия VIII, **XII**, № 5, СПБ. 1901.
68. L o é v e M On sets of probability laws and then limit elements. Univ. California publ. on statistics. **I**, 53—88, 1950.
69. L u k a c z E. On certain periodic characteristic functions. Proc. Int. Congr. Amsterdam, p. 296, 1954.
70. L u k a c z E. Characterization of populations by properties et suitable statistics. Proc. **III**, Berkeley Symp. math. stat. and prob., **2**, 1956.
71. L u k a c z E. Sur les fonctions caractéristiques analytiques. Ann. Inst. H. Poincaré, **15**, 217—251, 1957.
72. L u k a c z E. Remarks concerning characteristic functions. Ann. math. stat., **28**, No 3, 717—723, 1957.
73. L u k a c z E. Some extensions of a theorem of Marcinkiewicz. Pac. j. math., **8**, No 3, 487—501, 1958.
74. Marcinkiewicz J. Sur une propriété de la loi de Gauss. Math. Zs., **44**, 622—638, 1938.
75. M a t h i a s M. Über positive Fourier Integrale. Math. Zs., **16**, 103—125, 1923.
76. P a l e y R., W i e n e r N. Fourier transforms in the complex domain. N. Y. 1934.
77. P e r r o n O. Irrationalzahlen.
78. P h r a g m é n E. Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions. Arch. för math., **28**, 351—368, 1904.
79. P o l y a G. Remarks on characteristic functions. Proc. of the **I** Berkeley Symp., 115—123. 1949.
80. R é n y i A. On the algebra of distributions. Publ. math., **I**, 3, Debrecen, 135—149, 1950.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Юрий Владимирович Линник

Разложения вероятностных законов

Редактор *М. Е. Ильина*

Техн. редактор *Е. Г. Жукова*

Корректор *В. Измайлович*

Сдано в набор 29-III-1960 г. М-29567.
Подписано к печати 16 IV 1960 г.
Уч.-изд. 17,91 л. Печ. л. 16,5. Бум. л. 8,25.
Формат бум. $60 \times 92\ ^1/_{16}$. Тираж 5000 экз.
Заказ 343. Цена 13 р. 80 к.
С 1/I 1961 г. цена 1 р. 38 к.

Типография ЛОЛГУ. Ленинград,
Университетская наб., 7/9.